

# Paradojas Relativistas

Luis Joaquín Boya y Mariano Santander

*En este trabajo se discuten y resuelven diversas paradojas aparentes que aparecen tanto en la Teoría de la Relatividad Especial como en la Teoría de la Relatividad General.*

## 1. Introducción: un ejemplo de Feynman

Analizar un mismo problema desde varios puntos de vista suele ser iluminador. A veces aparecen situaciones en las que se obtienen dos respuestas diferentes cuando un problema se analiza de dos maneras que parecen, ambas, plausibles. En Física, se da, genéricamente, el nombre de *paradojas* a estas situaciones. La pregunta es ¿qué ocurre *realmente*, es decir, *en la Naturaleza*? Aclarar lo que ocurre resulta útil, ya que apunta a aquellos aspectos de nuestras teorías que no hemos comprendido o asimilado completamente. Y en muchos casos, resolver la paradoja, esto es, discernir cual de los dos razonamientos es correcto, y entender porqué, suele propiciar un entendimiento más profundo.

En sus “Lecciones de Física”, Feynman presenta una tal situación ([8], Sect. 17-4). Una serie de cargas eléctricas están colocadas sobre la periferia de un disco aislante que puede girar libremente alrededor de su eje, y que tiene un solenoide, solidario con el disco y concéntrico con su eje de rotación, por el que circula corriente suministrada por una batería. Inicialmente el disco está en reposo; en un momento dado, sin que medie ninguna intervención externa directa sobre el disco, se interrumpe la corriente. ¿Se pone el disco en rotación en ese momento o no? Hay dos razonamientos, ambos plausibles, que conducen a respuestas diferentes: el análisis de fuerzas sugiere que el disco debe comenzar a rotar ya que al haber una disminución del flujo magnético a través del solenoide se genera un campo eléctrico (Lenz) que produce una fuerza tangencial sobre las cargas. Pero usando el principio de conservación del momento angular, como el inicial es nulo parece concluirse que el disco no puede adquirir rotación. Feynman pospone la respuesta para que los estudiantes reflexionen sobre el problema, pero honradamente advierte que “*la solución no es fácil ni es un truco. Cuando la encuentren habrán descubierto un principio importante del electromagnetismo*”. Lo mismo hacemos nosotros.

## 2 Paradojas en la Ciencia: diversas acepciones

Los avances de la Ciencia natural pueden verse en buena parte como un alejamiento progresivo de la intuición vulgar y del realismo ingenuo. La aprehensión del mundo fenoménico en un todo racional y coherente, que es el objetivo de la ciencia, comienza por la observación elemental, sigue con la experimentación (observación provocada) y culmina en un primer estadio con el enunciado de leyes empíricas. Estas observaciones primarias tienen lugar a través de nuestras categorías sensoriales, que se han forjado, pulido y refinado a lo largo de la evolución de nuestros sentidos, especialmente la vista, el tacto y el oído. Es con esas categorías macroscópicas con las que se tienen que elaborar los primeros con-

ceptos abstractos. No es de extrañar por tanto que cuando la investigación de la naturaleza alcanza el dominio microscópico (i.e., la micra), y luego el atómico (i.e., el Angstrom), como ocurrió a principios del pasado s. XX, nuestras concepciones espacio-temporales primarias sean insuficientes para expresar en sus propios términos los nuevos fenómenos.

Pero hay otra sorpresa. Muchos avances científicos deben verse como una limitación a nuestras ideas e intuiciones ingenuas. Así por ejemplo el átomo aparece como un límite a la (natural) división de la materia en unidades cada vez más pequeñas, la velocidad de la luz  $c$  se muestra como la máxima velocidad alcanzable, y la medición simultánea de variables dinámicas conjugadas posee intrínsecamente una incertidumbre mínima. No estamos preparados evolutivamente para incorporar esas limitaciones, y tanto el papel de  $c$  como el de  $h$  son muy “antiintuitivos”.

Y no sólo es en lo muy pequeño donde debemos estar preparados para enfrentarnos a novedades inesperadas, en contra del sentido común ingenuo. Que la Tierra es redonda y no plana, que el hombre no es el centro del Universo, o que la fuerza engendra aceleración más bien que velocidad, ha costado aceptarlo e incluirlo en el elenco natural del hombre culto. Indica, en resumen, el largo camino que va de Aristóteles a Galileo. Si bien las antinomias aparecen sin esperarlas al contrastar experimentos, es el avance en el marco conceptual quien a la larga hará que las dificultades desaparezcan y que los aspectos paradójicos dejen de serlo. Hoy viajamos en avión y “vemos” que la Tierra es redonda, y aceptamos que las cosas están hechas de átomos, donde electrones cuasipuntuales nadan en un espacio esencialmente vacío, aunque los objetos que vemos nos aparecen macizos y continuos. Es con este enfoque, en el que el progreso científico debe hacer parecer natural y lógico lo que otrora fue paradójico y chocante, con el que queremos abordar en este trabajo diversas paradojas que se presentan al estudiar las Teorías Especial y General de la Relatividad.

Distinguiremos diversos tipos de “sorpresas” que aparecen en el devenir del pensamiento humano. En otro plano están por ejemplo las paradojas de la lógica, como la de B. Russell (sobre “el conjunto de todos los conjuntos”), lo que obligó a reformular la lógica matemática de G. Frege; o las limitaciones impuestas por el teorema de K. Gödel.

Nosotros queremos referirnos a situaciones en las que, a primera vista, la “solución” inmediata a un determinado problema no es la correcta, y aun más a otros casos, en que parece que hay dos o más soluciones diferentes a un mismo problema, que es lo que realmente entendemos por paradojas. Son éstas las que una buena teoría debe resolver, si es que está construida de un modo libre de contradicciones internas: un análisis detallado debe decidir cuál es la única respuesta



que se sigue de la teoría; en algunos casos incluso se podrá hacer alguna predicción experimental.

### 3. Paradojas en la Relatividad Especial

El rasgo distintivo característico de la Teoría de la Relatividad Especial (A. Einstein, 1905) es que existe una velocidad máxima de propagación de los efectos físicos, que se identifica con la velocidad de la luz en el vacío,  $c$ . Tres consecuencias inmediatas son: i) el carácter no absoluto del tiempo, es decir, la adscripción de un tiempo propio a cada observador, ii) la modificación de la ley de composición de velocidades, e iii) el aumento de la masa inercial de un objeto móvil. La contracción de longitudes y la dilatación del tiempo aparecen como consecuencias de lo anterior (consúltese cualquier texto de relatividad, por ejemplo [28, 21]). Baste enfatizar que en Relatividad, la duración que experimenta un móvil entre dos sucesos de su historia, ahora denominado *tiempo propio*, aparece como una *longitud* de su línea de universo en el espacio-tiempo, que ahora *sí depende* de la historia, esto es, del movimiento de la partícula entre los dos sucesos extremos, y no sólo de estos dos extremos. Esta longitud está dada por una expresión muy análoga a la que determina la longitud de una curva en la geometría euclídea, con la diferencia esencial de que la métrica en el espacio-tiempo no es definida positiva.

#### 3.1. La paradoja de los gemelos

Es obligado, al hablar de paradojas relativistas, empezar por la famosa paradoja de los gemelos. Dos hermanos gemelos, Castor y Pollux, se separan. Castor se queda en la Tierra, cuya desviación respecto de ser un sistema inercial ignoraremos al ser muy pequeña para los efectos que interesan aquí. Pollux viaja, muy rápido, a una estrella cercana, y vuelve. Al encontrarse con Castor, encuentra que éste ha envejecido mucho más que él mismo. Esta es la predicción de la teoría de la relatividad; se trata de una situación sorprendente, pero que se explica naturalmente por la geometría minkowskiana del espacio-tiempo, una de cuyas consecuencias es aquí pertinente: la dilatación del tiempo.

Uno de los gemelos, Castor, se mueve sin aceleración. Desde el punto de vista de Castor, Pollux se mueve, con una velocidad, que en un modelo realista deberá ser variable (debe acelerar, pasando de 0 a un valor de cruce  $v$ , al llegar a la estrella debe decelerar, detenerse, arrancar de nuevo para el viaje de regreso y frenar finalmente al llegar a su destino). La relatividad establece una relación entre el intervalo de tiempo propio  $\Delta\tau_C$  medido por Castor entre dos sucesos  $S_1$  y  $S_2$  muy cercanos de su línea de universo y el tiempo propio  $\Delta\tau_P$  de Pollux entre los dos sucesos sobre la línea de universo de Pollux que Castor considera simultáneos con  $S_1$  y  $S_2$ , que depende sólo de la velocidad instantánea de Pollux y es

$$\Delta\tau_P = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta\tau_C.$$

En la idealización usual se hace que los tres intervalos de aceleración y deceleración tengan una duración propia muy pequeña (a costa de que las aceleraciones sean grandes). Así Pollux acelera muy rápidamente hasta cierta velocidad  $v$ , que mantiene hasta la mitad del viaje. Allí hay un transitorio en

el que necesariamente tiene que frenar, acelerar en la dirección opuesta hasta conseguir la velocidad  $-v$  con la que regresa, y frenar finalmente para juntarse con Castor. Denotemos  $A_P = A_C = A$  el suceso "partida de Pollux", que ocurre sobre las líneas de universo de Castor y de Pollux,  $B$  la llegada de Pollux a su destino estelar (que ocurre sobre la línea de Pollux) y  $C_P = C_C = C$  el reencuentro, que de nuevo ocurre sobre ambas líneas. El análisis que Castor haría es: Si para mí transcurre un tiempo propio  $\tau_C$  entre los dos sucesos  $A$  y  $C$ , el suceso  $B$  es simultáneo, desde mi punto de vista, con un cierto suceso de mi historia, que denotaré  $B_C$ , que ocurre exactamente a la mitad de mi duración propia entre  $A$  y  $C$ . A cada una de estas dos mitades se puede aplicar la relación anterior según la cual el tiempo propio medido por Pollux entre  $A$  y  $B$  o entre  $B$  y  $C$  están relacionados con  $\tau_C/2$  mediante:

$$\tau_{P_-} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \tau_C / 2,$$

$$\tau_{P_+} = \sqrt{1 - (-v)^2/c^2} \tau_C / 2 = \sqrt{1 - v^2/c^2} \tau_C / 2,$$

y el tiempo propio total registrado por Pollux para su viaje es

$$\tau_P = \tau_{P_-} + \tau_{P_+} = 2\tau_{P_-} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \tau_C,$$

que es menor que el de Castor en el factor  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ; efectivamente, Pollux encontrará a Castor más viejo. Por ejemplo, si  $v = 0.8c$ , este factor vale 0.6.

¿Tendría Pollux el mismo derecho que Castor a considerarse a sí mismo en reposo, y a concluir por tanto que es él quien envejece? Si este argumento fuera correcto, tendríamos una contradicción flagrante. Pero no hay simetría entre ambos, ya que sólo Pollux tiene necesariamente que acelerar en algún momento de su viaje. La consecuencia importante de esta aceleración no es sobre el ritmo del reloj de Pollux, sino sobre la correlación que Pollux establece entre sucesos sobre la historia de Castor que Pollux considera como simultáneos con los que ocurren a lo largo de su propia historia. El análisis correcto de Pollux debe hacerse por separado en cada una de las dos partes del viaje en las que tiene derecho a considerarse en movimiento uniforme, sin aceleración. Pollux debería decir "durante mi viaje de ida, para mí transcurre un tiempo propio  $\tau_{P_-}$  entre los dos sucesos  $A$  y  $B$ . Hay un suceso, que llamaré  $B_-$  que ocurre en la historia de Castor y que desde mi punto de vista será simultáneo con mi parada intermedia  $B$ . Por supuesto, las fórmulas análogas a las anteriores valen para la relación entre el tiempo propio  $\tau_{P_-}$  medido por mí entre  $A$  y  $B$  y el tiempo propio  $\tau_{C_-}$  medido por Castor entre  $A$  y  $B_-$ ,

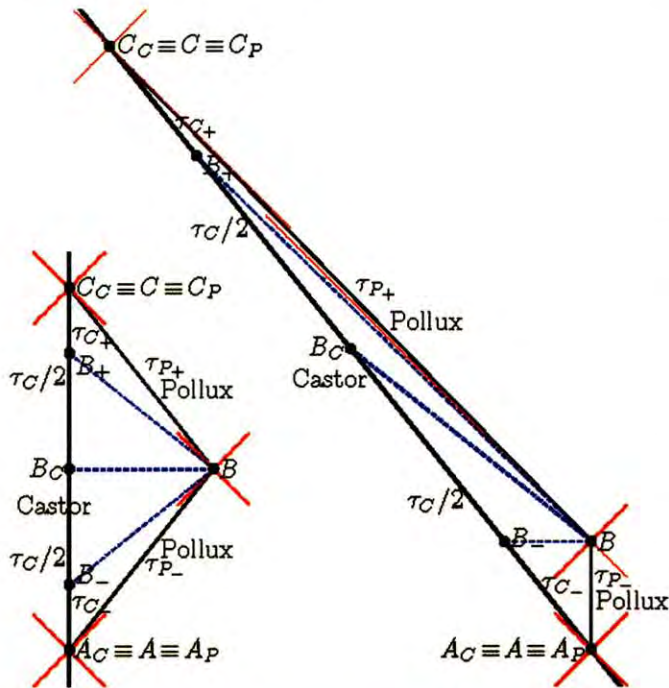
$$\tau_{C_-} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \tau_{P_-}."$$

En la otra mitad del análisis, que corresponde a su viaje de vuelta, la situación es semejante. Pero lo que es nuevo, y *no ocurre en el análisis de Castor*, es que el suceso  $B_+$  de la historia de Castor que Pollux considerará como simultáneo con  $B$  al iniciar el viaje de regreso, es diferente de  $B_-$  y posterior a él en la historia de Castor. Si denotamos  $\tau_{C_+}$  el tiempo propio que medirá Castor entre los sucesos  $B_+$  y  $C$ , que por simetría resulta ser igual  $\tau_{C_-}$ , vemos que la relación correcta



$$\tau_{C-} + \tau_{C+} = 2\tau_{C-} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \tau_p$$

no es contradictoria con la obtenida por Castor, ya que la suma  $\tau_{C-} + \tau_{C+}$ , sí que es menor que  $\tau_p$ , pero no coincide con el tiempo propio total medido por Castor: falta toda la contribución del segmento de la historia de Castor entre  $B_-$  y  $B_+$ . En el diagrama espacio-temporal (Fig. 1) se explica el resultado perfectamente.



**Figura 1.** Diagramas espacio-temporales de la paradoja de los gemelos, dibujados desde los puntos de vista de Castor y del viaje de ida de Pollux a una estrella situada a 4 años luz. Ambos diagramas se obtienen uno de otro mediante una rotación (de Minkowski, que físicamente corresponde a una transformación inercial pura) alrededor de  $A$ , y por tanto son exactamente el mismo diagrama espacio-temporal dibujado en dos “orientaciones” diferentes, determinadas por la línea de universo que aparece vertical y que se considera “en reposo”, y por su “espacio de simultaneidad”, que aparece horizontal. Las duraciones  $\tau_C = 10$  años,  $\tau_p = \tau_{p+} = 3$  años,  $\tau_p = \tau_{p-} = 1.8$  años son las mismas en ambos diagramas. Se han representado los conos de luz (en rojo) en los tres sucesos  $A, B, C$  para enfatizar que las líneas de universo de ambos gemelos son género tiempo, y están contenidas en los conos futuros de sus sucesos. Respecto de Castor, Pollux se mueve con velocidad  $\pm 0.8c$ . Las “superficies de simultaneidad” de un observador son aquí líneas (en azul y trazo discontinuo) simétricas, con respecto al cono, de la propia línea de universo del observador (p.ej.,  $BB_-$  para el observador “Pollux llegando a  $B$ ”). Nótese que en estos diagramas sólo las duraciones a lo largo de las líneas de universo “en reposo” ( $AC$  en el de Castor,  $AB$  en el de Pollux) y las distancias sobre las correspondientes líneas de simultaneidad ( $B_{CB} = 4$  años-luz en el de Castor,  $B_B = 2.4$  años-luz en el de Pollux) están representadas a “escala” en el sentido ordinario.

La fórmula básica de relación entre tiempos propios conduce, entre otras, a una predicción asombrosa: si Pollux pudiera mantener una velocidad constante igual a  $c$ , el tiempo propio medido por él se anularía. Pero esto no es posible; acelerar un cuerpo ordinario hasta la velocidad  $c$  requeriría infinita energía. Por el contrario, para los fotones, que siempre viajan a velocidad  $c$ , el tiempo propio no transcurre. Y la fórmula captura también otra propiedad básica: entre dos

sucesos dados, la historia que los incluye y que no tiene aceleración (que sería el movimiento natural, geodésico entre ambos sucesos) resulta tener el tiempo propio máximo.

El paralelismo con las distancias en la geometría euclídea es obvio: la longitud de una curva con dos extremos dados depende de la curva, y entre todas las curvas con extremos dados la longitud extremal, ahora un mínimo, es la de la línea recta, que no tiene curvatura. La relatividad simplemente extiende a las duraciones propias el tipo de comportamientos a los que estamos familiarizados para las longitudes espaciales, con ciertas diferencias debidas al cambio de una métrica definida positiva por otra indefinida, como ocurre con el cambio de longitud mínima cuando se sigue una recta por duración propia máxima a lo largo de un movimiento uniforme. Sugerimos al lector que construya un diagrama análogo para la geometría euclídea, en donde nuestra intuición directa es acertada. Y de hecho, la paradoja de los gemelos no es más que la versión minkowskiana de la conocida desigualdad triangular entre los lados de un triángulo; en esta versión, la duración propia a lo largo del lado  $AC$  es mayor que la suma de las duraciones a lo largo de los otros dos lados del triángulo. Un último comentario: eliminar la idealización de que las aceleraciones de Pollux son instantáneas se reduce a suavizar sus líneas de universo en los tres sucesos  $A, B$  y  $C$ , y ello es perfectamente factible, dentro de la Relatividad especial; basta llevar a cabo el cálculo correcto de la duración propia a lo largo de un movimiento con velocidad variable. A veces se dice, incorrectamente, que siempre que hay aceleraciones, no es suficiente con la Relatividad Especial, lo que es tan inadecuado como sería afirmar que la geometría euclídea sólo trata con rectas y en ella no tienen cabida resultados sobre longitudes de líneas curvas arbitrarias; desde luego pueden darse, aunque son más complicados y requieren el cálculo integral.

El efecto de dilatación del tiempo se ha comprobado experimentalmente muchas veces. La primera confirmación se obtuvo de la presencia, al nivel del mar, de muones (originados en la alta atmósfera a unos 20 Km por los rayos cósmicos) cuya vida media en reposo es del orden de dos microsegundos. Si no hubiese dilatación temporal, incluso viajando a la velocidad de la luz la distancia máxima que podrían recorrer sería del orden de 600 m, lo que haría que prácticamente ninguno llegase “vivo” al nivel del mar. Pero sus dos microsegundos de vida media están dilatados en un factor  $\gamma := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} > 1$  desde el punto de vista de la Tierra, dándoles la oportunidad de, a las velocidades a las que viajan, recorrer los 20 Km. Asimismo la adaptaciones de los sincrotrones (un tipo de aceleradores de partículas) a la masa variable es otro ejemplo de comprobación “tecnológica” de las peculiaridades de la relatividad especial.

Incluso hay comprobaciones experimentales directas de la diferencia entre los tiempos propios experimentados por relojes que se separan, siguen historias diferentes y vuelven a reunirse. La más conocida es la de Hafele y Keating (1972) [10]: cuando en torno a 1970 se dispuso de relojes con precisión relativa del orden de  $10^{-13}$  se comparó el registro de tiempo entre un reloj mantenido en el aeropuerto, otro circunvalando en un avión la Tierra en vuelo hacia el Este y un tercero circunvalando hacia el Oeste. La corrección de la Relatividad Especial afecta a los tres relojes, ya que la velocidad pertinente es la relativa a un sistema inercial, siendo el



vuelo hacia el E el que tiene una velocidad menor. Para un avión volando a 1000 Km/h a 10 Km de altura, esta corrección de la relatividad especial resulta del mismo orden de magnitud  $10^{-12}$  que la gravitatoria, que se discutirá luego, y el experimento produjo unas diferencias absolutas  $\tau_O - \tau_A$  y  $\tau_E - \tau_A$  ( $\tau_A$  es el tiempo propio del reloj del aeropuerto), de  $273 \pm 7$  ns (Oeste) y  $-59 \pm 10$  ns (Este), a comparar con la previsión teórica,  $251 \pm 21$  ns y  $-40 \pm 23$  ns respectivamente.

La bibliografía sobre esta paradoja es inmensa, con títulos muy recientes. Entresacamos, como especialmente sugerente, [6]. En [34] se discute la paradoja en otras topologías para el espacio, en donde sigue subsistiendo una asimetría aunque en este caso no sea necesaria aceleración para volver. Para el caso de movimiento circular del reloj, ver [13].

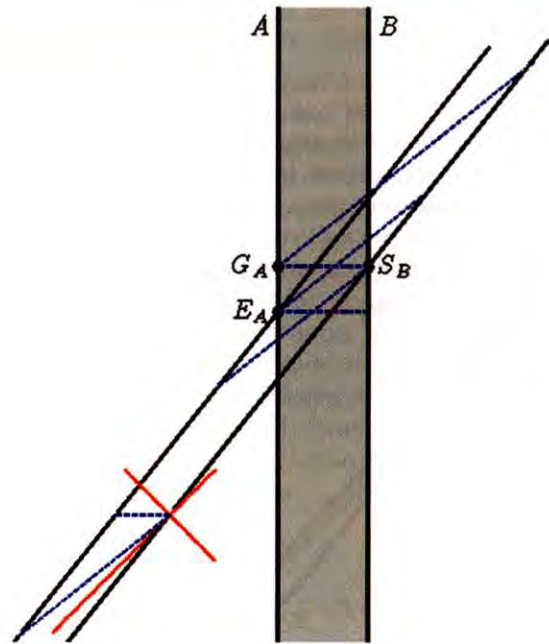
### 3.2. Paradoja de la pértiga y el granero

Un atleta corre a velocidad  $v$  llevando horizontalmente una pértiga, cuya longitud en reposo es  $L$ , enfilada hacia un granero o pajar, un cobertizo con tejadillo de la misma longitud  $L$  y sin puertas, cuyos dos extremos llamaremos  $A$  y  $B$  ( $A, B$  son puntos en el espacio, no sucesos). Desde el punto de vista del granero, la longitud de la pértiga aparece contraída por el factor  $1/\gamma$ , de manera que en algún instante la pértiga está completamente dentro del granero. Pero desde el punto de vista del corredor, la pértiga tiene longitud  $L$  y es el granero quien aparece contraído a una longitud  $L/\gamma$ , de manera que aparentemente la pértiga nunca cabrá en el granero.

Para traducirlo a una situación más claramente paradójica, supongamos que se instala en el extremo lejano  $B$  del cobertizo (según lo ve el corredor que se acerca) un sensor que en cuanto la pértiga llega al punto  $B$  produce la activación (instantánea desde el punto de vista del granero) de una guillotina que desciende y corta cuanto haya en la entrada  $A$ . En este caso, desde el granero parece claro que la guillotina no cortará la pértiga (ya que cuando baja, la pértiga está ya completamente dentro del granero), mientras que desde el punto de vista del corredor, quien ve un granero de longitud menor que su pértiga, parecería que la guillotina debería cortar la pértiga. Que la pértiga resulte cortada o no es algo absoluto, en lo que ambos necesariamente deberán estar de acuerdo. Así se presenta la paradoja.

La solución reside en que la simultaneidad no tiene el mismo significado para ambos observadores. El análisis hecho desde el granero, en el cual el dispositivo funciona de manera que la bajada de la guillotina es simultánea con la activación del sensor de llegada es correcto, y la pértiga *no resulta cortada*. Desde el punto de vista del corredor los sucesos "llegada del extremo de mi pértiga al fondo  $B$  del granero" y "bajada de la guillotina en el extremo  $A$ " no son simultáneos, sino que entre ellos transcurre un cierto intervalo de tiempo suficiente para que durante él la pértiga avance y su extremo posterior ya haya atravesado la entrada del granero (el extremo delantero ya habrá salido, por supuesto). Un diagrama espacio-temporal (Fig. 2) es de gran ayuda en el análisis.

Para un experimento mental similar, el del tren y el andén, ver [20].



**Figura 2.** Diagrama espacio-temporal de la paradoja de la pértiga y el granero, dibujado desde el punto de vista del granero cuyo interior, delimitado por las líneas de universo de sus dos extremos  $A, B$ , se representa en gris. El corredor avanza a velocidad  $v = 0.8c$  y las dos líneas oblicuas en negro son las líneas de universo de los dos extremos de la pértiga. Desde el punto de vista del granero, la pértiga está completamente dentro durante todo el intervalo que media (líneas de simultaneidad horizontales, en azul y trazo grueso) entre los dos sucesos  $E_A$  (el extremo posterior de la pértiga atraviesa el extremo cercano  $A$  del granero) y  $G_A$  (bajada de la guillotina en la entrada  $A$ ) que en el granero es simultáneo con  $S_B$  (activación del sensor por el extremo anterior de la pértiga cuando este llega a  $B$ ). Desde el punto de vista del corredor (líneas de simultaneidad oblicuas, en azul y trazo más fino), la pértiga *nunca* está completamente contenida en el granero. Pero el suceso  $G_A$  ocurre *después* del suceso  $E_A$  (que a su vez ocurre después de  $S_B$ ) *para el corredor*, desde cuyo punto de vista la guillotina *tampoco* corta a la pértiga; no hay paradoja. Se representa también la línea de simultaneidad del corredor que incluye al suceso  $G_A$ , en la cual puede leerse la ubicación de la pértiga en el "instante" del corredor en el que la guillotina baja.

### 3.3. Paradoja de las dos naves espaciales

Esta paradoja se conoce también como "paradoja de Bell" [3]. Dos naves espaciales idénticas  $A$  y  $B$  están en reposo (desde el punto de vista de un hangar espacial) alineadas, una tras otra en la misma dirección, y separadas por una distancia  $L$  medida entre dos puntos correspondientes de las naves, por ejemplo salientes en  $A$  y en  $B$ . Disponen de un programa de arranque idéntico, que se activa simultáneamente desde el punto de vista del hangar y que da a las naves una aceleración (propia) constante, que actúa durante un cierto intervalo de tiempo propio prefijado, dejando al final de su ejecución a las dos naves moviéndose a una misma velocidad constante  $v$ . Durante todo el proceso de aceleración, la separación entre ambas, vista desde el punto de vista del hangar inicial, es siempre  $L$ , que se mantiene una vez alcanzado el régimen final. Imaginemos que antes de arrancar se ata a los salientes una cuerda de longitud exactamente  $L$  y cuya resistencia mecánica sea pequeña rompiéndose ante cualquier tracción que supere cierto valor de rotura.



Naturalmente, antes del arranque la cuerda está íntegra pues su longitud es justamente la necesaria para cubrir la separación requerida.

La pregunta es: ¿se rompe o no la cuerda durante el proceso de aceleración? Desde el punto de vista del hangar, la distancia entre los dos salientes es siempre  $L$  y parecería que la cuerda no debe romperse, independientemente de la velocidad final  $v$  que las naves puedan alcanzar. Pero desde el punto de vista de las naves, cada una de ellas ve la distancia (propia) que la separa de la otra aumentar según pasa el tiempo, hasta acabar teniendo un valor  $L' = L\gamma$  cuando se alcanza el régimen final (en efecto, desde el punto de vista del hangar, la separación entre las naves debe ser precisamente  $L'/\gamma = L$ ). Como  $L' > L$  lo que los pilotos de las naves esperarán es que la cuerda se rompa en algún momento del proceso de aceleración, justamente cuando la tracción que las dos naves ejercen sobre la cuerda supere su límite de rotura.

¿Se rompe realmente la cuerda? En su artículo, John Bell relata que habiendo sometido esta cuestión a escrutinio entre los físicos del CERN, surgió división de opiniones, entre quienes como Bell opinaban que la cuerda ciertamente se rompería, (que es la predicción que sigue de usar el sistema de referencia en comovimiento con una de las naves) y quienes pensaban que la cuerda no se rompe, aunque la velocidad final sea grande, como parece deducirse del hecho de que en el sistema de referencia del hangar la longitud de la cuerda sigue siendo  $L$ .

El análisis completo de este ejemplo es más complejo que en la paradoja de la pértiga y el granero, ya que en él interviene la resistencia de la cuerda a las tensiones, que en última instancia provienen de los enlaces atómicos y moleculares en el material de la cuerda. La longitud natural (propia, en reposo)  $L$  de una varilla está determinada en términos de estas propiedades, y cuando la varilla se acelera es natural suponer que su longitud propia  $L'$  en el sistema en comovimiento en el que la varilla se encuentra instantáneamente en reposo es la misma que era inicialmente. Aceptando esta hipótesis, la respuesta correcta es que la cuerda se romperá. En el análisis hecho desde el hangar falta la consideración de las tensiones que aparecen en la cuerda como consecuencia de estar sometida a una aceleración. En una teoría relativista, el concepto ingenuo de sólido rígido se torna resbaladizo y hay efectos sorprendentes (ver [31] que contiene también referencias a trabajos anteriores sobre este tema). El más importante es que, incluso en un movimiento sin rotación, (como por ejemplo en una nave espacial acelerando en una dirección fija), diferentes puntos en un cuerpo extenso lo más "rígido" posible experimentan aceleraciones diferentes, que deforman el cuerpo hasta que las fuerzas elásticas que mantienen el cuerpo unido compensan las aceleraciones diferenciales; estas fuerzas aparecen como tensiones. Por ejemplo, una varilla "rígida" de longitud propia  $L$  no puede acelerarse por encima de un valor máximo de aceleración propia de su extremo frontal,  $a \leq c^2/L$ , ya que para este valor, la aceleración de su extremo opuesto resultaría infinita. Aunque lo importante es que según la relatividad, estos efectos existan, con las aceleraciones que se encuentran en la vida cotidiana esta limitación es totalmente irrelevante: para un cuerpo de 100 m (los tanques impulsores de la nave Columbia), la aceleración máxima permitida por la relatividad especial sería del orden de  $10^{14}g$ , mientras que las máxi-

mas aceleraciones que se experimentan en el despegue vertical son del orden de unos pocos  $g$ .

### 3.4. Acoplamiento Spin-Órbita

Más que una paradoja, esto es un efecto peculiar de las transformaciones de Lorentz, que traemos a colación por la gran importancia que tuvo en física atómica. Seguiremos esencialmente a Jackson [14].

Históricamente, la hipótesis del Spin (Uhlenbeck y Goudsmith, 1925) incluía también atribuir al electrón un momento magnético dipolar, de valor

$$\boldsymbol{\mu} = -e\mathbf{S} / m_e c$$

donde  $\mathbf{S}$  es el vector del spin del electrón,  $|\mathbf{S}| = \hbar / 2$ . Ese valor, que corresponde a suponer  $g = 2$  para la razón giro-magnética, se precisa para la correcta explicación del efecto Zeeman anómalo (con  $g = 1$  el efecto es el triplete normal). Ahora lo aplicamos a la interacción spin-órbita. En un átomo alcalino se puede considerar un sólo electrón (de valencia) girando alrededor del *core* (núcleo más electrones en las capas completas); si  $\mathbf{E}$  es el campo electrostático del *core*, el electrón ve aparentemente un campo magnético  $\mathbf{H} = \mathbf{E} \times \mathbf{v}/c$ , donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad lineal instantánea del electrón, y el campo de Coulomb es radial,  $\mathbf{E} = (dV/dr) \mathbf{r}/r$ , de modo que la energía de spin-órbita sería  $E_{so} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}$  y resulta por tanto una energía adicional

$$E_{so} = (e^2/m^2c^2)(\mathbf{I} \cdot \mathbf{S})(dV/dr) 1/r$$

que difiere de la experimental en un factor de 1/2 (!), al aplicarla a la estructura fina de los alcalis (Na, K, ...). Los inventores del spin no se dieron cuenta del factor 1/2, pero sí Heisenberg. También Einstein, que se enteró por Bohr en Leiden del spin, y corrigió el factor 1/2, convenciendo al danés en el acto de la bondad de la hipótesis del spin. Por fin, L. H. Thomas publicó (y ya J. Frenkel anticipó) el análisis correcto en 1927, convenciendo incluso a Pauli.

El error del cálculo anterior estriba en que es el núcleo quien está (en muy buena aproximación) en un sistema inercial, pero *no el electrón*; hay una corrección al considerar el electrón inicial visto desde el núcleo (*boost*  $K_1$  en  $-\mathbf{v}$ ) y de éste a la nueva posición girada del electrón (con velocidad ahora  $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ ) con  $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{a}\Delta t$ , otro *boost* no colineal  $K_2$ . El resultado de la composición  $K_2K_1$  es que el campo magnético efectivo es

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = (\gamma - 1)(c^2/v^2) \mathbf{H} = ((1 - (v/c)^2)^{-1/2} - 1)(c^2/v^2) \mathbf{H} \approx (1/2)\mathbf{H}$$

debido a que la composición de dos *boosts* no colineales incluye una rotación. Nótese que el cálculo no es una pura corrección relativista, que sería del orden de  $(v/c)^2 \approx 10^{-6}$  sino una corrección relativista *aditiva* a un término que ya es relativista ( $\mathbf{H} = \mathbf{E} \times \mathbf{v}/c$ ).

El lector puede encontrar más detalles en [14]; para otros aspectos, ver [36, 4].

### 4. Paradojas en Relatividad General

Para la Relatividad General dos bien conocidos textos clásicos son los de Misner, Thorne y Wheeler *Gravitation*, y de Weinberg *Gravitation and Cosmology*.



#### 4.1. Relojes en el Ecuador y en el Polo

Consideremos dos relojes ideales idénticos, uno en el polo y otro en el ecuador, ambos al nivel del mar [11]. Relativamente a un sistema inercial determinado (en primera aproximación) por el centro de la Tierra, el reloj del ecuador rota y recorre 40000 Km en 24 horas, mientras que el del polo no. La Teoría de la Relatividad Especial predice que, relativamente al del polo, el reloj en el ecuador atrasa por un factor relativo

$$-v_E^2/2c^2 \approx 1.4 \times 10^{-12}$$

(el argumento en la dirección inversa es incorrecto, ya que a diferencia del del polo, el reloj en el ecuador no se mueve inercialmente). Esta predicción figura en el artículo de 1905 de Einstein, quien indica también su extremada pequeñez que la pone fuera de las posibilidades experimentales de comprobación en aquel momento.

Pero el Principio de Equivalencia (1907) introduce un nuevo ingrediente, que resulta ser imprescindible: dos relojes idénticos en reposo, en dos lugares con diferente potencial gravitatorio, exhiben también una diferencia en su ritmo, que está dada por un factor relativo de  $+\Delta\Phi/c^2$ , donde  $\Phi$  es el potencial gravitatorio newtoniano. Resulta que el potencial gravitatorio de la Tierra en el polo  $\Phi_P$  y en el ecuador  $\Phi_E$  son diferentes, (ya que la Tierra no es una esfera perfecta, sino que está achatada por los polos; su superficie la suponemos determinada por la condición de equilibrio hidrostático de un fluido en rotación) Así, si tomamos en cuenta los dos efectos, el de velocidad y el gravitatorio, el factor relativo total por el que difieren los ritmos entre el reloj en el ecuador y en el polo es simplemente la suma de las dos contribuciones (ya que  $(1+x)(1+y) \approx (1+x+y)$  si  $x, y \ll 1$ )

$$-v_E^2/2c^2 + (\Phi_E - \Phi_P)/c^2 = (-v_E^2/2 + (\Phi_E - \Phi_P))/c^2$$

Si se realiza el cálculo usando  $\Phi = -GM/r$  y los valores  $r_E$  y  $r_P$  de los "radios" ecuatorial y Polar de la Tierra, se encuentra la aparente sorpresa de que la contribución gravitatoria cancela exactamente a la de la relatividad especial: los dos relojes van exactamente al mismo ritmo. Por supuesto, no es una coincidencia. La condición que determina la superficie del nivel del mar es la de ser una superficie equipotencial de un potencial equivalente  $\Phi - v^2/2$  que incluye el "pseudopotencial centrífugo", donde  $v$  es la velocidad lineal con la que rota un punto dado de la superficie terrestre; esta condición determina el abultamiento ecuatorial de la superficie del mar. Al nivel del mar, el potencial equivalente tiene el mismo valor en el polo  $\Phi_P$  y en el ecuador  $\Phi_E - v_E^2/2$ , lo que explica la cancelación exacta encontrada antes.

El resultado neto es que los dos relojes marcan exactamente al mismo ritmo. Este efecto, que resulta directamente del principio de equivalencia, aparece automáticamente incorporado, al igual que el efecto de velocidad debido a la relatividad Especial, en la Teoría de Einstein de la gravitación, usando la métrica de Schwarzschild (o de Kerr). Einstein nunca corrigió su primer cálculo, ni siquiera cuando recopió el trabajo de 1905 para una subasta [11]. Una comparación entre la paradoja de los gemelos y el presente ejemplo, con aspectos históricos, se da en [25].

#### 4.2. Radiación de una carga acelerada

Una carga eléctrica  $Q$  en reposo (encima de una mesa) en un campo gravitatorio produce sólo un campo eléctrico estacionario y por tanto no radia. Pero, por el principio de equivalencia, un campo gravitatorio es equivalente a un sistema acelerado. Mas una carga en movimiento acelerado debe radiar; ésa es la paradoja, que tiene una historia larga y bastante controvertida [23, 33], y que es importante en cuanto tiene que ver con una eventual posible violación del principio de equivalencia por la electrodinámica.

Si aceptamos que el principio de equivalencia es válido universalmente, y por tanto debe ser aplicable también a esta situación, la conclusión inevitable es que un observador en reposo relativamente a la carga no puede observar radiación, aunque la carga tenga un movimiento con aceleración constante. Tomemos pues una carga eléctrica en movimiento hiperbólico (con aceleración propia constante, esto es, en el "movimiento uniformemente acelerado" en Relatividad); un observador cuyo movimiento sea un movimiento hiperbólico con la misma aceleración, no debe recibir ninguna radiación: se detecta solo el campo electrostático, y sin campo magnético no hay radiación. Un análisis reciente [33] hecho en el contexto del espacio de Rindler (el espacio de Minkowski descrito desde el punto de vista de un observador en movimiento hiperbólico) confirma esta conclusión.

El análisis es más complejo para un observador en movimiento arbitrario con respecto a la carga. Rohrlich [9] demuestra que, en efecto, hay radiación en algunos casos, de tipo "aguja". De manera que la observación de radiación es parcialmente dependiente del observador, y lo importante no es sólo si la carga que emite se mueve con aceleración, sino también el estado de movimiento relativo del receptor. En [33] puede encontrarse una bibliografía sobre este tema.

#### 4.3. La paradoja del submarino

Un submarino sumergido está en reposo y en equilibrio neutro; las fuerzas de flotación (de Arquímedes) compensan exactamente su peso, lo que ocurre cuando la densidad del submarino en reposo  $\rho_s$  es igual a la del mar  $\rho_m$ . En un momento dado el submarino acelera horizontalmente, hasta alcanzar una velocidad relativista. ¿Se mantiene en equilibrio neutro? Y si no, ¿se va al fondo o sube hacia la superficie?

Desde el punto de vista de un sistema de referencia ligado al mar, el submarino se mueve con velocidad  $v$ . ¿Cual es su densidad en ese sistema? Hay dos efectos en juego. Por un lado, el contenido de masa-energía del submarino se incrementa por un factor  $\gamma$ . Por otro, la longitud horizontal del submarino lo hace por el factor  $1/\gamma$  (se achata) y como sus dimensiones transversales no cambian, el volumen se achica por un factor  $1/\gamma$ . Para la densidad los factores  $\gamma$  contribuyen multiplicando: la densidad del submarino que se mueve con velocidad  $v$ , vista por un observador en reposo con respecto al mar es  $\rho_s \gamma^2$ . Esta densidad es mayor que la del mar,  $\rho_s \gamma^2 > \rho_m$ . La predicción es que el submarino debe hundirse.

Sin embargo, desde el sistema de referencia del submarino, que naturalmente usarían los tripulantes, el mar aparece como deslizándose con velocidad  $-v$ , y para la densidad del mar en ese sistema entran en juego los mismos dos efectos que discutimos antes: el contenido de masa-energía de un



cierto “bloque” de agua se incrementa, relativamente al que ve un observador para el que el mar está en reposo, por el factor  $\gamma$  (que depende sólo de  $v^2$ , y por tanto es insensible al cambio  $v \rightarrow -v$ ), y por otro lado el volumen del bloque se achica, de nuevo por el factor  $1/\gamma$ . Así pues, los marineros asignarían una densidad  $\rho_m \gamma^2$  al mar, que resulta pues mayor que la del submarino  $\rho_m \gamma^2 > \rho_s$ : los marineros esperarían que el submarino suba a la superficie.

¿Qué ocurre? Esta paradoja resulta ser la más moderna entre las que discutimos en este artículo; se conoce también como paradoja de Supplee debido a que en 1989 J. Supplee [30] dió un análisis, basado en relatividad especial y el principio de equivalencia, que lleva a la misma predicción en ambos sistemas: el submarino se hunde con aceleración  $g(\gamma^2 - 1)$ . En 2003, G. Matsas [18] realizó un estudio más completo del problema, cuya conclusión confirma el resultado de Supplee que por su curiosidad ha sido muy comentado mereciendo titulares pintorescos como “La relatividad general hunde un submarino” [19]. Y aunque la idea de un submarino moviéndose en un mar a velocidades relativistas hace enarcar las cejas a cualquier persona razonable, el resultado es de interés en los procesos astrofísicos de acreción, y por su relación con las implicaciones de la termodinámica de los agujeros negros.

El error del argumento aplicado por los marineros radica en la suposición implícita de que el campo gravitatorio que se ve desde el submarino es el mismo que percibe un observador para el que el mar está en reposo. Esto, que es correcto en la teoría newtoniana de la gravitación—donde solo la posición instantánea de las fuentes pero no su velocidad importa para crear el campo gravitatorio—*no es así* en la teoría de la gravitación de Einstein, en donde la masa en movimiento produce una componente adicional del campo gravitatorio, dependiente de la velocidad. No hay tal componente adicional para un observador que vea el planeta y el mar en reposo, por lo que la condición de neutralidad para él es la igualdad entre las densidades del objeto y del volumen desalojado; su razonamiento era correcto. Pero para los tripulantes, que ven la fuente del campo gravitatorio en movimiento, la condición de equilibrio neutro *no es la igualdad de las densidades* y resulta ser más complicada, dependiendo de la velocidad. Cuando se incorpora este elemento en la predicción de los marineros, el resultado es también que el submarino se hunde.

#### 4.4. Pérdida de Información en los agujeros negros

Se dice que un agujero negro (una masa  $M$  concentrada en un volumen menor que el dictado por su radio de Schwarzschild  $r_s = 2GM/c^2$ ) absorbe todo lo que cae sobre él. Sin embargo, Beckenstein y Hawking determinaron que el agujero negro posee entropía (proporcional al área del horizonte) y por ello temperatura, y Hawking concluye (1975) que la temperatura le hace radiar como un cuerpo negro; por tanto, eventualmente el agujero negro se evapora. Aquí viene la paradoja: si formamos el agujero arrojando materia en forma concreta (por ejemplo un camión), la masa del camión acabará eventualmente escupida como radiación del cuerpo negro, perdiéndose la preciosa información sobre el camión. Pero se supone que la evolución de “todo” es cuántica, y por ello unitaria. Ahora bien, la evolución unita-

ria mantiene la información (estados puros van a estados puros, no mezcla ...). He ahí la paradoja.

Fue Hawking quien primero presentó la paradoja de “pérdida de información” en contra de otros como ‘t Hooft y Susskind, quienes mantienen que la información no se puede perder, y que por ello debe haber sutiles correlaciones en la radiación emitida, de las que en principio sería posible extraer la información original sobre que el agujero se tragó un camión...

Recientemente S. Hawking ha cambiado de opinión, y admite ahora que no hay pérdida de información, al respetarse el sentido unitario de la evolución del sistema, de acuerdo con la mecánica cuántica [12].

### 5. Otras paradojas

Entre las paradojas que aparecen en la relatividad especial hemos seleccionado unas pocas para presentar con cierto detalle. Aunque hay muchas más, que no hemos incluido para no extender en demasía el trabajo, mencionamos simplemente algunas con referencias bibliográficas básicas.

- 1) La apariencia visual de objetos en movimiento rápido. Una fotografía a un objeto en movimiento rápido no revela la contracción de longitud, que requeriría un registro de todos los fotones que el cuerpo emite en un mismo instante, mientras que a la placa fotográfica llegan fotones que han sido emitidos en diversos instantes [24, 32, 35]; curiosamente una esfera en movimiento a cualquier velocidad aparecería en una fotografía con un contorno *exactamente circular* [24]. Una revisión reciente se encuentra en [17].
- 2) Paradojas ligadas al *redshift* gravitatorio [7] y a velocidades aparentemente superlumínicas en los *quasars* [5].
- 3) Otras paradojas cinemáticas y dinámicas: la llamada paradoja de Rindler [26]; la de la tapa de alcantarilla, una versión bidimensional de la de la pértiga y el granero ([21], Chap. 3, Problem 36) o la conocida como paradoja de la peonza que bascula (*Tippe top*) [2].
- 4) Otras paradojas en electromagnetismo: Rindler [29] y Jefimenko [15, 16]

### 6. Coda

¿Cuál es la solución a la paradoja de Feynmann presentada en la introducción? El análisis de fuerzas es correcto, de manera que el disco debe comenzar a rotar. Pero el principio de conservación del momento angular debe aplicarse al problema. Si después el sistema tiene un momento angular no nulo, también debió tenerlo antes. Y si no se manifestaba en una rotación del disco, tal momento angular debe residir en el propio campo electromagnético. Y en efecto, la teoría de Maxwell predice que el campo electromagnético posee, en general, densidad de energía y de momento lineal, así como de momento angular. Al establecer el campo electromagnético creado por la corriente en el solenoide se suministró un momento angular al sistema, que reside en el propio campo. Y cuando el campo desaparece, este momento angular cuya desaparición estaría prohibida por el principio de conservación, no tiene otra alternativa que revertir en rotación del disco.



## Referencias

- [1] ALVAREZ-GAUMÉ L., VÁZQUEZ MOZO M.A., 2005. Einstein y la Geometría, *Rev. Esp. Fis.* **19**, 25-33.
- [2] BASU A, SARASWAT R.S., KHARE K.B., SASTRY G.P., BOSE S., 2002. Tippe top paradox in relativity. *Eur. J. Phys.* **23**, 295-305.
- [3] BELL J.S., 1990. ¿Como enseñar la relatividad especial?, Lo decible y lo indecible en Mecánica Cuántica, Alianza Universidad 661.
- [4] COSTELLA J.P., MCKELLAR B.J., RAWLINSON A.W., STEPHENSON G.J., 2001. The Thomas rotation. *Am. J. Phys.* **69**, 837-847.
- [5] CHODOROWSKI M.J., 2005. Superluminal apparent motions in distant radio sources, *Am. J. Phys.* **73**, 639-643.
- [6] DOLBY C.E, GULL S. F., 2001. On radar time and the twin "paradox", *Am. J. Phys.* **69**, 1257-1261.
- [7] FABRI E., 1994. Paradoxes of gravitational redshift, *Eur. J. Phys.* **15**, 197-203.
- [8] FEYNMAN R.P., LEIGHTON R.B. Y SANDS M., 1972. Lectures on Physics II. Mainly Electromagnetism and matter, Fondo Educativo Interamericano.
- [9] FULTON J., ROHRLICH F., 1960. *Ann. Phys.* **9**, 499.
- [10] HAFELE J.C., KEATING R.E., 1972. *Science* **177**, 166-170.
- [11] HARVEY A., SCHUCKING E., 2005. A small puzzle from 1905, *Physics Today* **58**, 34-36.
- [12] HAWKING S.W., 2005. Information Loss in Black Holes, hep-th/0507171.
- [13] IORIO L., 2005. On the clock paradox in the case of circular motion of the moving clock, *Eur. J. Phys.* **26**, 535-541.
- [14] JACKSON J.D., 1962. Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, New York Section 11.5.
- [15] JEFIMENKO O., 1999. A relativistic paradox seemingly violating conservation of momentum in electromagnetic systems, *Eur. J. Phys.* **20**, 39-44.
- [16] LABARTHE J-J., 1999. The vector potential of a moving charge in the Coulomb gauge, *Eur. J. Phys.* **20**, L31-32.
- [17] MANOUKIAN E.B., SUKKHASENA S., 2002. Projection of relativistically moving objects on a two-dimensional plane, the "train" paradox and the visibility of the Lorentz contraction, *Eur. J. Phys.* **23**, 103-110.
- [18] MATSAS G.E., 2003. Relativistic Archimedes law for fast moving bodies and the general-relativistic resolution of the "submarine paradox", *Phys. Rev. D* **68**, 027701 1-4.
- [19] Nature Physics portal, <http://www.nature.com/physics/highlights/6948-1.html>.
- [20] NELSON A., 2003. Reinterpreting the famous train/embankment experiment of relativity, *Eur. J. Phys.* **24**, 379-396.
- [21] OHANIAN H.C., 2001. Special Relativity, Physics Curriculum, Lakeville, Minnesota.
- [22] PASCUAL P., LATORRE J.I., 2005. La Teoría de la Relatividad Especial, *Rev. Esp. Fis.* **19**, 4-9.
- [23] PEIERLS R., 1979. Surprises in Theoretical Physics, Princeton Series in Physics, 160-166.
- [24] PENROSE R., 1959. The apparent shape of a relativistically moving sphere, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **55**, 137-139.
- [25] PESIC P., 2003. Einstein and the twin paradox, *Eur. J. Phys.* **24**, 585-590.
- [26] RINDLER W., 1961. Length contraction paradox, *Am. J. Phys.* **24**, 365-366.
- [27] RINDLER W., 1966. Kruskal space and the uniformly accelerated frame, *Am. J. Phys.* **34**, 1174-1178.
- [28] RINDLER W., 1977. Essential Relativity, Springer, New-York.
- [29] RINDLER W., DENUR J., 1988. A simple relativistic paradox about electrostatic energy, *Am. J. Phys.* **56**, 795.
- [30] SUPPLEE J., 1989. Relativistic Bouyancy, *Am. J. Phys.* **57**, 75-77.
- [31] TAYLOR E.P., FRENCH A.P., 1983. Limitation of proper length in special relativity, *Am. J. Phys.* **51**, 889-893.
- [32] TERRELL J., 1959. Invisibility of Lorentz contraction, *Phys. Rev.* **116**, 1041-1045.
- [33] SARIATI A., KHORRAMI M., 1999. Equivalence principle and radiation by a uniformly accelerated charge, *Found. Phys. Lett* **12**, 427-439.
- [34] UZAN J-P., LUMINET J-P., LEHOUCQ R., PETER P., 2002. The twin paradox and space topology, *Eur. J. Phys.* **23**, 277-284.
- [35] V. F. WEISSKOPF, 1960. The visual appearance of rapidly moving objects, *Physics Today* **13**, 24-27.
- [36] YAMASAKI H., 1991. Geometrical interpretation of relativistic composition of velocities and the Thomas precession, *Eur. J. Phys.* **12**, 218-223.

**Luis Joaquín Boya**

está en el Dpto. de Física Teórica. Universidad de Zaragoza

**Mariano Santander**

está en el Dpto. de Física Teórica. Universidad de Valladolid

The advertisement features a collage of physics book covers: "Group Theory and Quantum Mechanics" by Michael Tinkham, "NUCLEAR SHELL THEORY" by Amos de-Shalit and Igal Talmi, "Scattering of Light by Crystals" by William Hayes and Rodney Loudon, "COLLISION THEORY" by Martin L. Goldberger and Kenneth M. Watson, and "Methods of Analytical Dynamics" by Leonard Meirovitch. A large circular stamp in the background reads "NOVEDADES DOCTA 25% DESCUENTO".

**AULA DOCUMENTAL DE INVESTIGACIÓN**  
 C/ Martín de los Heros, 66  
 28008 Madrid Tel 91 542 82 82 - Fax 91 559 30 60  
<http://www.auladoc.com>