

# Notas de clase

Una pizarra en la que intercambiar experiencias docentes

## ¿Cómo vuela un aeroplano?

Una serie de experimentos sencillos para comprender el origen de la sustentación repasando conceptos básicos en dinámica de fluidos



Por Teresa López-Arias y otros

**L**a dinámica de fluidos o *fluidodinámica* es una rama importantísima de la física; a su vez, ninguna otra rama o especialidad de la física o de la ingeniería puede prescindir de ella. A pesar de su interés, a menudo los cursos de física fundamental la presentan sólo de forma superficial, reduciéndose a pocas aplicaciones elementales, la mayor parte basadas en el Principio de Bernoulli. Aquí presentamos a los lectores de la *Revista de Física* de la RSEF un proyecto (véanse más detalles en [fisicavolo.wordpress.com](http://fisicavolo.wordpress.com), [plstrento.wordpress.com](http://plstrento.wordpress.com) y [lcsfunitn.wordpress.com](http://lcsfunitn.wordpress.com)) que puede servir de inspiración para remediar ese problema. Nuestra motivación es que el vuelo y sus bases físicas es un tema que suscita gran interés y curiosidad en los estudiantes, de modo que resulta atractivo para introducirles algunos de los conceptos elementales, como presión, viscosidad, esfuerzo de corte y capa límite, a la vez que se les da una explicación sencilla y accesible de la fuerza de sustentación de un aeroplano. El proyecto se corresponde, de hecho, con un esquema didáctico sobre la física del vuelo que nuestro Departamento propone desde hace cinco años a profesores y estudiantes de Bachillerato en la zona.

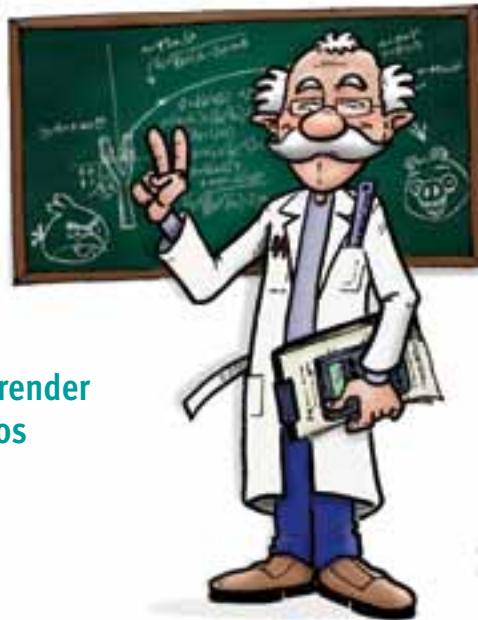


Ilustración por gentileza de Alberto García Gómez ([albertottog.com](http://albertottog.com)).

### Metodología y laboratorio

El laboratorio se desarrolla en tres fases principales que ponen en interacción escuela, universidad y museo, es decir, tres niveles de enseñanza distintos y complementarios:

1. Un curso de formación de 15 horas dedicado a los profesores de Bachillerato.
2. Un laboratorio interactivo dedicado a los estudiantes.
3. Una visita a un museo donde los estudiantes pueden "aprender a volar" virtualmente usando simuladores de vuelo. Esta fase es específica de la zona, pues se basa en la afortunada presencia en Trento del Museo dell'Aeronautica Gianni Caproni ([www.museocaproni.it](http://www.museocaproni.it)), pero puede reemplazarse por otras visitas o por vídeos.

Describimos a continuación brevemente los bloques conceptuales en que se divide el laboratorio, siguiendo el recorrido didáctico tal como es presentado a los estudiantes.

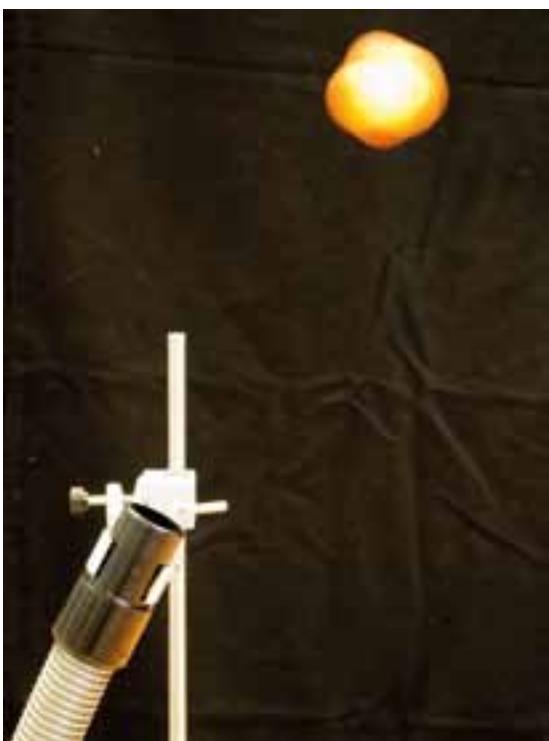
Es importante iniciar el laboratorio considerando las fuerzas en juego que determinan la suerte del aeroplano. Así como el origen del peso y de la propulsión son reconocidos sin dificultad por el estudiante, no es igualmente fácil explicar el origen físico de la resistencia y de la sustentación. A menudo el estudiante apela al principio de Arquímedes para explicar la sustentación, y algunos consideran que el empuje contribuye a ella de forma no despreciable. Un rápido cálculo de órdenes de magnitud demuestra que no es así: volar y flotar son, sin lugar a dudas, cosas diferentes.

Durante el laboratorio se discute el mecanismo de interacción entre el aire y el ala, utilizando los principios de la dinámica (apartados a y b en esta sección), se introducen los conceptos de viscosidad, capa límite y condición de no deslizamiento (apartado c) y, por último, se hacen algunas consideraciones sobre la presión y su medida (apartado d).

#### a. La sustentación y el tercer principio de la dinámica

Un experimento sencillo, que permite comprender la interacción entre un fluido y un sólido,

**Fig. 1.** Experimento de la pelota en “levitación” que sirve para motivar la discusión sobre la interacción entre un flujo de aire y una superficie. El efecto de movimiento de la pelota se debe a las oscilaciones que experimenta en el flujo turbulento de aire.



consiste en “suspender” una esfera ligera, como una pelota de ping-pong, en un flujo de aire como el que proporciona un simple secador de pelo<sup>1</sup> (figura 1). Este experimento es conocido en la literatura como “levitación de Bernoulli”. No nos detendremos aquí a discutir los motivos por los cuales este experimento no es un buen ejemplo del Principio de Bernoulli “en acción”, pues ya se ha discutido ampliamente en la literatura [1, 2]. La interacción del aire proveniente de un chorro (o *jet*) cuyo diámetro (en la boquilla) es similar al tamaño del objeto es completamente diferente de



**Fig. 2.** Con ayuda de un globo, un dinamómetro y un elástico es posible medir la fuerza que el flujo de aire genera en su interacción con el globo.

la interacción de un flujo de aire de dimensiones infinitas respecto al objeto (como en el caso de un aeroplano, un balón de fútbol o una pelota de tenis).

Resulta más fácil visualizar el comportamiento del aire usando un globo grande en lugar de la pelotita. Para ello construimos un “visualizador de flujo” con un bastoncillo de madera al que adherimos varias tiras de plástico ligeras<sup>2</sup>. Los estudiantes asocian la desviación (y consiguiente aceleración) del flujo de aire a la acción de una fuerza. Deduciremos con los estudiantes que el tercer principio nos lleva a concluir que una fuerza igual y en sentido opuesto se observará en el globo. En efecto, esta fuerza (del orden de algunas décimas de N) se puede medir fácilmente con un dinamómetro (figura 2).

Supongamos ahora que introducimos en el flujo un perfil alar. Se observará que en este caso el aire es desviado principalmente por la parte superior del perfil. Si ahora disponemos horizontalmente tanto el flujo de aire como el ala, concluiremos que a la fuerza que provoca la desviación del aire por parte del perfil alar corresponde una fuerza sobre el ala que va en sentido opuesto al peso y que es, precisamente, la sustentación.

Puesto que hemos utilizado un perfil alar asimétrico, es importante explicar a los estudiantes que las conclusiones serían idénticas en el caso de que hubiéramos usado un perfil simétrico (o incluso plano), siempre y cuando, en estos dos últimos casos, se situase el perfil alar con un determinado ángulo (llamado ángulo de ataque) respecto al eje del flujo de aire (figura 3).

Muy a menudo se encuentran en la literatura explicaciones de la sustentación que imponen como condición necesaria para obtenerla la curvatura del perfil alar. La imposición de un perfil alar asimétrico y curvo nace solamente de la necesidad ulterior de imponer otra condición falsa, el así llamado “principio de igual tiempo de tránsito”. Según este “principio” dos parcelas de aire que se dividen en el borde de ataque del perfil alar se deben reunir de nuevo al final del mismo en el mismo intervalo de tiempo. Esta falsa hipótesis se plantea sólo para justificar la aceleración del aire sobre la parte superior del perfil alar: puesto que recorre una mayor distancia en el mismo intervalo de tiempo, el aire que pasa por encima “debe” acelerar para reunirse con el que pasa por debajo. Aplicando entonces el principio de Bernoulli, se concluye que la mayor velocidad del aire implica una menor presión sobre la parte superior del perfil respecto a la inferior, generando esta diferencia de presión la fuerza en sentido opuesto al peso que se conoce como sustentación. Sobre la falsedad y contradicciones de esta explicación

1 Es importante usar sólo aire frío, para evitar que la pelota se pueda fundir con el calor.

2 Para construir las tiras finas y ligeras son ideales las bolsas de plástico para la verdura que se usan en el supermercado.

y los errores en los que se incurre, incluso en la misma aplicación del principio de Bernoulli, no nos detendremos aquí, pues han sido tratadas extensamente en la literatura [3].

### b. Los efectos de la sustentación: el “downwash” y el campo de presión de un perfil alar

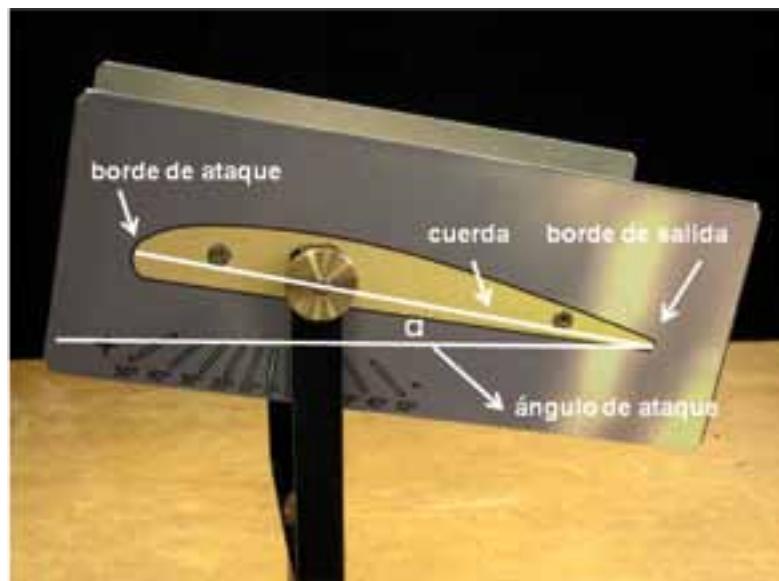
El objetivo del paso siguiente en el laboratorio es mostrar a los estudiantes cómo calcular la sustentación con un objeto de forma geométrica sencilla cuando éste interacciona con un flujo de aire. Para ello utilizamos una superficie semicilíndrica<sup>3</sup> (figura 4). Cada uno de los orificios practicados en la superficie se conecta, secuencialmente, a un manómetro diferencial. Los resultados obtenidos con un flujo de aire de, aproximadamente, 20 m/s, se muestran en la Tabla I.

Tabla I		
Orificio	$(\Delta P \pm 0,01)(\text{hPa})$	Ángulo
1	-0,25	10°
2	-0,25	30°
3	-0,68	50°
4	-0,60	70°
5	1,22	90°
6	1,34	110°
7	1,10	130°
8	0,60	150°
9	0,60	170°

**Tabla I.** Valores de la presión estática (respecto a la presión atmosférica) para cada uno de los orificios de la superficie del semicilindro (ver texto y figura 4). Los valores de los sectores 1 y 9 se toman arbitrariamente iguales a los valores medidos, respectivamente, en los orificios 2 y 8.

Se procede a tarar la balanza cuando el semicilindro se encuentra sobre ella en ausencia del “viento”. A continuación, con el flujo de aire en acción, se mide el peso. Los estudiantes deducen que la balanza debe registrar un peso negativo. Esta previsión es confirmada por el experimento. A continuación medimos cualitativamente cuánto aire es desviado por el semicilindro. Para ello situamos una segunda balanza detrás del flujo de aire y colocamos sobre ella una pequeña plata-

<sup>3</sup> Las dimensiones del cilindro son: diámetro  $D = 8 \text{ cm}$ , altura  $H = 5 \text{ cm}$ . El semicilindro se divide en nueve sectores de  $20^\circ$  de amplitud. Los orificios se practican en el centro de cada sector. En el primero y en el último no se practicaron físicamente los orificios, por lo que el primer valor se mide a  $30^\circ$  (orificio 2) y el último a  $150^\circ$  (orificio 8). Se asume que los valores de la presión en el centro del primer y último sector de la superficie del cilindro coinciden, respectivamente, con los medidas en los orificios 2 y 8. Por lo tanto tenemos 7 valores medidas de la presión (ver Tabla I).



forma para “recoger” la mayor cantidad de aire posible. Haciendo de nuevo tara nula, como para la primera balanza, observamos que la segunda registra un peso aproximado igual y de signo opuesto al registrado por la primera balanza: la superficie debe desviar, para obtener una sustentación dada, una cantidad de aire (denominada en la jerga aeronáutica *downwash*), cuyo peso sea del mismo orden de magnitud que la sustentación: véase la figura 5.

Podemos aprovechar aún más nuestro semicilindro para hacer algunas conclusiones interesantes.

Utilizando los datos de la Tabla I podemos calcular la fuerza, en sentido opuesto al peso, como la proyección, en la dirección vertical respecto al plano de trabajo, del sumatorio

$$\sum_{i=1}^n \vec{P}_i \cdot \vec{S}_i \quad (1)$$

donde  $S_i$  es la superficie de cada sector del cilindro,  $P_i$  es el valor de la presión en el orificio  $i$ .

**Fig. 3.** Partes principales de un perfil alar. En la foto, el perfil presenta un ángulo de ataque de  $10^\circ$  respecto a un “viento” imaginario que circule de izquierda a derecha.



**Fig. 4.** Un conjunto de siete orificios practicados en un semicilindro permite medir el campo de presión sobre su superficie cuando es sometido a un flujo de aire. Las “aletas” laterales sirven sólo para canalizar mejor el flujo de aire.

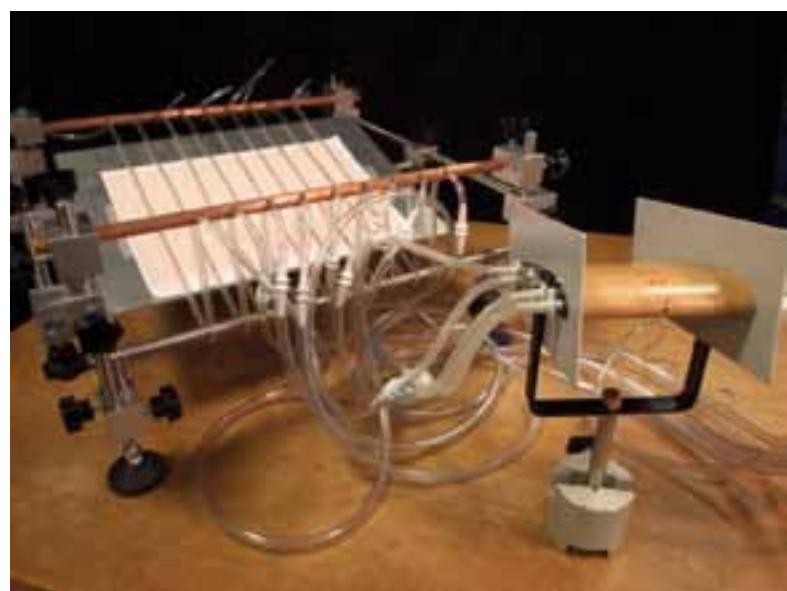
**Fig. 5.** Experimento de la “doble balanza” para medir el *downwash*, realizado con un perfil alar en lugar del semicilindro. El aire desviado por esta superficie lo recoge la segunda balanza. La sustentación generada sobre el perfil (peso negativo en la primera balanza) corresponde cualitativamente al peso del aire desviado hacia abajo y medido por la segunda balanza.



ésimo y  $n$  es el número de orificios practicados en la superficie del cilindro. Podemos visualizar cualitativamente el campo de presión de un perfil alar usando un instrumento que hemos llamado “multi-manómetro diferencial”: un conjunto de tubos en U individualmente conectados a los respectivos orificios practicados en el perfil (figura 6). Los tubos se llenan con un líquido coloreado<sup>4</sup> y se colocan apoyados sobre un plano inclinado para aumentar la sensibilidad del instrumento, dado que las variaciones de presión, a las velocidades utilizadas, son muy pequeñas.

Nos resta solamente discutir con los estudiantes de dónde nace la fuerza que desvía el aire cuando entra en contacto con las alas, y cuáles son las causas físicas de que esta fuerza “desaparezca”, provocando la barrena del aeroplano. La respuesta está en la naturaleza viscosa del aire y en un concepto fundamental, aportado por Ludwig Prandtl (1875-1953) en 1903: la capa límite [4] cuya introducción es el objetivo del siguiente paso en nuestro recorrido didáctico.

**Fig. 6.** El multi-manómetro diferencial: los tubos en U se conectan secuencialmente a los orificios practicados en la superficie del perfil alar.



<sup>4</sup> Normalmente usamos alcohol desnaturalizado que, por ser coloreado, hace más fácil la observación y porque, una vez evaporado, no deja residuos en el interior de los tubitos de plástico.

### c. La viscosidad y la capa límite

La experiencia cotidiana nos dice que los fluidos ofrecen resistencia al paso de los cuerpos sólidos en su seno. La razón no es otra que la viscosidad. Este parámetro nos da una medida de la relación entre el esfuerzo de corte y la deformación que éste produce.

Es un hecho incontestable que nada de lo que sucede cuando el aire y el ala se encuentran tendría lugar si el aire no fuera viscoso.

¿Por qué es tan importante insistir sobre este punto? Porque la causa de la desviación del aire que encuentra el ala nace precisamente del “enganche” viscoso del aire al ala: la condición de ausencia de deslizamiento (*no-slip condition*) de un fluido que fluye sobre una superficie. Esta condición establece que la velocidad relativa entre un fluido y la superficie sólida sobre la que fluye es nula en el punto de contacto: el fluido está —literalmente— “pegado” a la superficie.

Mostramos a los estudiantes la validez de esta condición con ayuda de dos experimentos. El primero consiste en espolvorear un bote metálico brillante con polvo de tiza. A continuación se somete el bote a un flujo de aire comprimido o a un potente chorro de agua. Aunque parte del polvo se elimina, permanece una fina capa de polvo que sólo con un trapo o con el dedo se puede eliminar (figura 7).

El segundo experimento consiste en mostrar la formación de la capa límite. Son necesarios un pequeño plato de cristal, un cilindro, glicerina y tinta<sup>5</sup>. Se cubre el fondo del platito con la glicerina y se deposita el cilindro en el centro. Después se traza, con ayuda de una jeringuilla, una línea de tinta sobre la superficie de la glicerina (figura 8). A continuación se gira lentamente el cilindro y se observa que éste “arrastra” consigo la línea de tinta, que viaja a la misma velocidad en el punto de contacto, mientras que el fluido viaja a una velocidad diferente que aumenta lentamente en dirección perpendicular al movimiento del fluido. La capa en la cual la velocidad relativa de la glicerina y la superficie del cilindro pasa desde cero (en el punto de contacto) a un valor dado (lejos de la superficie de contacto) es precisamente la capa límite<sup>6</sup>.

Con la ayuda ulterior de material audiovisual y varias simulaciones (ver, por ejemplo, <http://media.efluids.com/galleries/all?medium=13>), es fácil concluir que es precisamente la *no-slip condition* que provoca la variación gradual de la velocidad de las capas superiores en la dirección transversal al flujo, aumentando la velocidad desde cero (en

<sup>5</sup> Una versión “económica” de este experimento se puede hacer sustituyendo la glicerina por miel, por ejemplo.

<sup>6</sup> En general el espesor de la capa límite se define como aquel en el que la velocidad del fluido pasa de cero (en la superficie) al 99% del valor de la velocidad externa del fluido.

la superficie) a la velocidad del viento fuera de la capa límite (aproximadamente 900 km/h para un avión de línea). El espesor de la capa límite es muy pequeño (del orden del centímetro) para el caso de un aeroplano, lo que significa dos cosas: primera, que los esfuerzos de corte que se producen en ese mínimo espesor, aunque son sólo una pequeña fracción de la presión atmosférica, integrados sobre la superficie total de las alas son suficientes para mover toneladas de aire; la segunda, que la viscosidad es importantísima para generar la desviación del aire aunque sólo en una capa muy fina comparada con las dimensiones del ala.

No es casual que en nuestro laboratorio la presión sea el último argumento presentado: podemos explicar la sustentación en un aeroplano sin emplear dicho concepto. Sin embargo, en la práctica es necesario conocer el campo de presiones de un determinado perfil alar, y esto nos lleva a hablar, necesariamente, de la presión. Pero ¿de qué presión hablamos? ¿Cuál es la presión que hemos medido con el "multi-manómetro en U" sobre el cilindro y sobre el perfil alar?

Este punto es fundamental, puesto que en la mayor parte de los libros de texto de Bachillerato la "constante" que aparece en el principio de Bernoulli es interpretada como una densidad de energía del fluido, lo cual, sin dejar de ser dimensionalmente correcto, no ayuda a la comprensión física del significado de la constante. Ésta no representa otra cosa que la presión total medida en un punto de un fluido a lo largo de una determinada línea de flujo, y si despreciamos la componente que depende de la altitud (aproximación válida en el caso del vuelo), es la suma de la presión estática y de la presión dinámica. ¿Cómo se puede llegar a obtener este resultado sin deducir matemáticamente la ecuación de Bernoulli? Usando un instrumento de medida fundamental en la aeronáutica y de fácil construcción: el tubo de Pitot. Éste es el último paso en nuestro recorrido.

#### d. La presión en condiciones dinámicas: el tubo de Pitot

El tubo de Pitot moderno, llamado también tubo de Pitot-Prandtl<sup>7</sup> (figura 9), consiste en dos tubos finos (diámetro del orden del milímetro) conectados a un sensor de presión. Uno de los tubos presenta un orificio en la parte frontal, mientras que el otro lo tiene en la parte lateral con su superficie paralela al eje del tubo y al flujo. Colocando el instrumento alineado con la dirección del flujo de aire, éste entrará en los tubos. En pocos instantes el tubo se llena de aire y, por consiguiente, en su extremo frontal, el aire alcanza velocidad nula. Esto significa que toda la energía del fluido



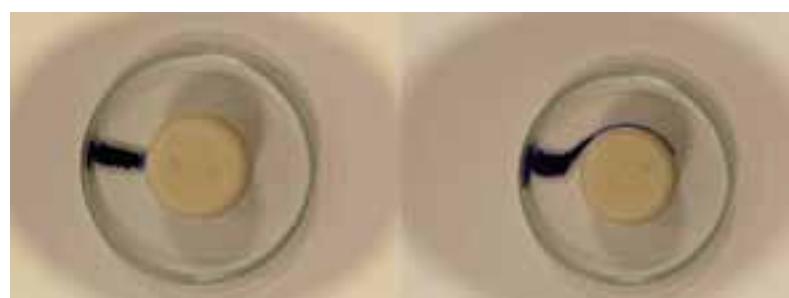
**Fig. 7.** El polvo permanece pegado a las superficies aunque un fluido a alta presión pase por encima de ellas.

se transfiere a esta superficie como una presión, denominada presión total.

Midiendo la presión estática en condiciones dinámicas (en el sistema de referencia del viento), la diferencia entre ésta y la presión total da la componente dinámica de la presión. El orificio lateral practicado en el segundo tubito proporciona, precisamente, la componente estática de la presión del aire en movimiento, que no es otra que la resultante de los choques casuales de las moléculas de aire en la dirección perpendicular a la superficie del orificio. Esta afirmación, sin embargo, necesita ser justificada: si no teóricamente, al menos fenomenológicamente. ¿Por qué podemos afirmar que la presión que mide el sensor lateral del tubo de Pitot es la presión estática del aire en movimiento? Y, más importante todavía, ¿qué significado tiene la presión estática en condiciones dinámicas? En su libro *Introduction to Flight* (MacGraw-Hill, 2008) D. Anderson Jr. ofrece un "modelo" sencillo de este significado que, con las debidas explicaciones, puede dar una idea intuitiva del concepto de presión estática de un fluido en movimiento.

Es el siguiente: viajar a 80 km/h con una mosca en el habitáculo de nuestro coche puede ser muy molesto. Sin embargo, si la mosca nos golpea sentiremos sólo un pequeño impacto, puesto que en nuestro sistema de referencia, nuestra velocidad relativa a la mosca es nula (figura 10). Sentimos sólo su presión estática, es decir, el resultado de su impacto casual con la superficie de nuestra piel. Si abrimos la ventanilla y la mosca sale disparada, las consecuencias del impacto para un peatón serían bien distintas: éste recibiría sobre su piel un impacto correspondiente a la suma de la presión estática

**Fig. 8.** Un experimento sencillo muestra la formación de la capa límite. En la figura de la derecha el cilindro ha girado casi 180° en el sentido de las agujas del reloj. Se observa que en el punto de contacto la tinta es arrastrada por la superficie con velocidad relativa nula: ésta es la condición de ausencia de deslizamiento.



<sup>7</sup> A partir de aquí, por tubo de Pitot se sobreentiende el moderno tubo de Pitot-Prandtl, con dos sensores de presión: total y estática.

**Fig. 9.** Sensor de presión total (tubo con el orificio central) y estática (tubo con el orificio lateral), conectado a un manómetro diferencial, que da directamente la diferencia entre las dos. En ausencia de viento (en la imagen) el sensor registra un valor nulo:  $P_T = P_S$ , correspondiente a la presión atmosférica.



(“medida” en el habitáculo) y la presión dinámica, resultante del hecho de que la mosca, respecto al sistema de referencia terrestre del peatón, viajaba a 80 km/h. La mosca comunica así al peatón su presión total, suma de la estática y la dinámica.

Pues bien: el sensor de presión estática del tubo de Pitot, mide solamente los impactos casuales de moléculas de aire que entran perpendicularmente en el orificio lateral. Medir la presión estática del viento con un tubo de Pitot equivale entonces a medirla en el sistema de referencia del viento.

Los dos valores que proporciona el tubo de Pitot,  $P_T$  e  $P_S$ , permiten deducir inmediatamente nuestra velocidad relativa respecto al viento.

Naturalmente, la presión estática depende directamente de la velocidad del viento, y por ello la sustentación puede calcularse, a partir de la medida de las presiones estáticas, punto por punto, sobre una superficie (como en el ejercicio del semi-cilindro). Este sencillo cálculo, en versión didáctica, reproduce exactamente los cálculos

**Fig. 10.** El tubo de Pitot permite medir la presión estática y total de un fluido en condiciones dinámicas (ver texto). Dibujo: S. Oss.



numéricos, mucho más complejos pero conceptualmente idénticos, que se llevan a cabo en una galería de viento durante la fase de proyecto y desarrollo de cualquier estructura que deba estar inmersa en un fluido en movimiento.

## Conclusión

Hemos presentado el laboratorio “La fluidodinámica y la física del vuelo” que, mediante experimentos sencillos, algunas medidas cuantitativas y la observación directa y en imágenes multimedia de varios fenómenos de interacción entre fluidos y superficies sólidas, permite alcanzar una comprensión correcta del origen de la sustentación en un aeroplano. El laboratorio, que emplea tres niveles de aprendizaje complementarios —curricular, extracurricular y museístico— está dividido en tres bloques fundamentales:

- Estudio del origen de la sustentación usando los principios de la dinámica.
- Estudio del papel de la viscosidad en el origen de la sustentación.
- Medida y significado de la presión en condiciones dinámicas.

Los materiales usados son, en su mayor parte, de fácil uso y construcción. Los instrumentos de medida utilizados son de carácter didáctico y suelen hallarse en un laboratorio de bachillerato. Todo el trabajo de programación del esquema didáctico y curricular se hace en cooperación con los docentes.

Este laboratorio forma parte, desde hace cinco años, de la oferta formativa del “Piano Nazionale Lauree Scientifiche” ([www.progettolaureascientifiche.eu](http://www.progettolaureascientifiche.eu)) que el Ministerio del ramo italiano dedica a la formación y orientación de los estudiantes de los últimos años de Bachillerato, y es un ejemplo de cómo se puede utilizar un tema extracurricular para vehicular conocimientos curriculares en un contexto extra-escolar de laboratorio y multimedia.

## Referencias

- [1] T. LÓPEZ-ARIAS, L. M. GRATTON, G. ZENDRI y S. OSS, *Phys. Educ.* **46** (2011) 373-375; T. LÓPEZ-ARIAS, L. M. GRATTON, G. ZENDRI y S. OSS, *Phys. Educ.* **46** 146-151 (2011)
- [2] EASTWELL, “P. Bernoulli? *The Science Education Review* **6** (1) (2007)
- [3] N. F. SMITH, *The physics teacher*, noviembre (1972) 453-455; K. WELTNER, *Am. J. Phys.* **55**, 50 (1987); K. WELTNER, *Phys. Teach.* **28**, 78 (1990); H. BABINSKY, *Phys. Educ.* **38** (2003) 497-503;
- [4] J. D. ANDERSON JR., *Physics Today*, diciembre (2005) 42-48

Teresa López-Arias  
(Didattici delle Scienze Sperimentali) con  
G. Zendri, L. Gratton y S. Oss  
(Comunicazione delle Scienze Fisiche),  
Departamento de Física, Universidad de Trento

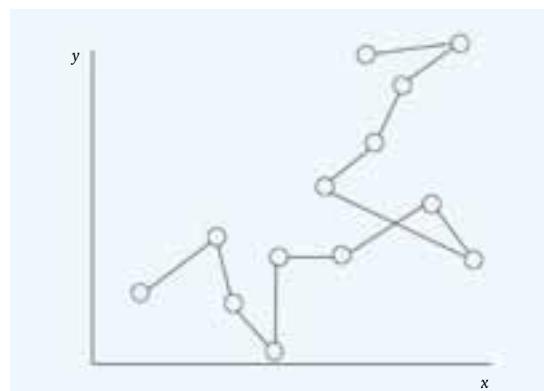
# La constante de Avogadro a partir del movimiento browniano

Por Alejandro del Mazo



**L**os experimentos de Jean Perrin a principios del siglo xx confirmaron la interpretación del movimiento browniano propuesta por Einstein en 1905. Este hecho constituyó una sólida prueba a favor de la existencia de las moléculas, lo que hasta entonces era más bien una hipótesis de trabajo de la teoría atómico-molecular de la materia. De hecho, el estudio del movimiento de partículas microscópicas suspendidas en un líquido permitió a Perrin determinar la constante de Avogadro, esto es, el número de moléculas contenido en un mol de sustancia. Reproducimos a continuación uno de los métodos de Perrin, modificándolo para adaptarlo a los medios actuales.

La historia puede comenzar en el año 1827, cuando el botánico escocés Robert Brown, mientras examinaba granos de polen de *Clarckia pulchella* bajo el microscopio, observó el movimiento aleatorio de partículas en el interior de vacuolas en esos granos [1]. Brown advirtió ese mismo comportamiento en el polen de plantas que habían permanecido en líquidos conservantes, en resinas, partículas de madera fósil y minerales pulverizados. Como el propio Brown reconoció, antiguos microscopistas como Gray, Leeuwen-

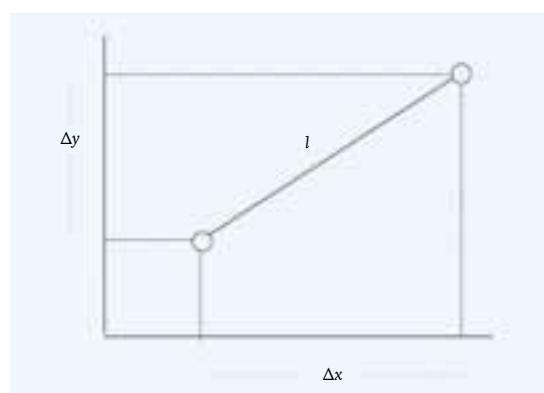


**Fig. 1.** Desplazamiento de una partícula microscópica en un fluido a intervalos constantes de tiempo.

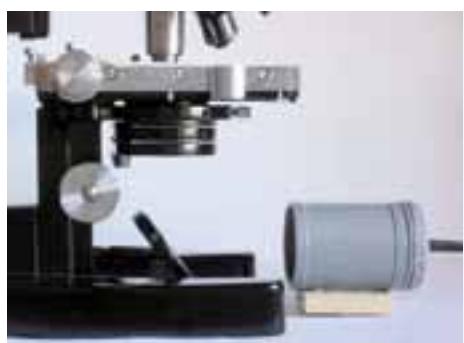
hoek, Spallanzani o Buffon ya habían realizado observaciones parecidas, aunque fue él quien rechazó por primera vez que el fenómeno —conocido ahora como *movimiento browniano*— pudiera atribuirse a causas vitales.

En la física de la segunda mitad del siglo xix la escuela “energetista”, influenciada por la filosofía positivista, consideraba el concepto de energía lo suficientemente potente como para explicar los fenómenos naturales sin necesidad de introducir hipotéticos elementos de discontinuidad, como los átomos. Sin embargo, algunos físicos como Rudolf Clausius, James C. Maxwell y Ludwig Boltzmann, convencidos de la existencia real de entidades elementales, elaboraron teorías cinéticas que explicaban satisfactoriamente las propiedades de los gases a partir del movimiento aleatorio de moléculas. La aplicación de la teoría cinética permitió a Johann Loschmidt [2] determinar, en 1865, el diámetro de una “molécula de aire” y estimar un número de  $1,8 \times 10^{18}$  moléculas por centímetro cúbico en este gas.

En cuanto al movimiento de partículas descubierto por Brown, una vez descartada cualquier explicación basada en corrientes de convección, tomó peso la idea de que el origen podía estar en el continuo bombardeo de las partículas en suspensión por parte de las moléculas del líquido. La interpretación llegó, en 1905, de la mano de Albert Einstein [3], quien afirmaba que “de acuerdo con la teoría cinético-molecular del calor, cuerpos de un tamaño microscópicamente visibles suspendidos en líquidos deben realizar, como resultado de los movimientos moleculares té-



**Fig. 2.** Componentes del desplazamiento de una partícula en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ .



**Fig. 3.** Sistema de iluminación. A, LED. B, lente colimadora. C, espejo. D, condensador. E, portaobjetos.

**Fig. 4.** Cámara compacta con ocular micrométrico y acoplamiento casero.

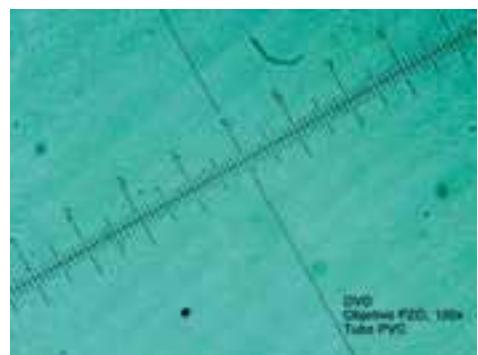
micos, movimientos de tal magnitud que pueden ser observados fácilmente con un microscopio. Es posible que los movimientos que van a discutirse aquí sean idénticos al denominado movimiento molecular browniano [...]. Sin embargo, Einstein veía difícil que, en la práctica, pudiera determinarse adecuadamente el desplazamiento browniano. No obstante, Jean Perrin consiguió realizar una serie de experimentos, publicados



**Fig. 5.** Calibrado del ocular micrométrico con las pistas de un DVD examinado con objetivo de 100 aumentos.

en 1909 [4] y divulgados posteriormente por él mismo [5], con los que logró confirmar las previsiones de Einstein. Los resultados experimentales de Perrin conducían a un valor para el número de moléculas de un mol cuyo orden de magnitud era coherente con otros cálculos, como los de Loschmidt. El propio Perrin propuso en 1909 denominar a este número de moléculas, *constante de Avogadro*.

Uno de los dos métodos utilizados por Perrin para obtener dicha constante se basó en la aplicación de la ecuación obtenida por Einstein al movimiento de partículas microscópicas de guatambá y otras resinas, suspendidas en líquidos. El experimento ha sido reproducido desde en-



tonces en innumerables ocasiones [6, 7, 8, 9] y básicamente requiere contar con los siguientes elementos:

- Una suspensión de partículas con tamaño tal que pueda percibirse en ellas el movimiento browniano.
- Un sistema de observación y medición microscópica tanto del diámetro de las partículas como de sus desplazamientos.
- Un sistema de registro de imágenes y un método de análisis de movimientos.

### Consideraciones teóricas

Aunque la teoría cinético-molecular parecía el marco adecuado para interpretar el movimiento browniano, los intentos para explicarlo a través del teorema de equipartición no resultaron adecuados. El éxito logrado por Einstein en 1905 para explicar “el movimiento de partículas pequeñas suspendidas en líquidos” se basó, en primer lugar, en la idea de que las partículas en suspensión podían considerarse como las moléculas del soluto en una disolución [10]. Por otra parte, era bastante evidente que la continua actividad de tales partículas hacía imposible medir su velocidad. Esta dificultad fue sorteada por Einstein al introducir la idea fructífera del desplazamiento durante un cierto intervalo de tiempo, definido por el segmento que une la posición inicial y final que ocupa la partícula en ese intervalo. El valor medio de los desplazamientos sufridos por la partícula en intervalos de tiempo iguales es el desplazamiento medio.

Si se estudia el movimiento browniano desde esta perspectiva, al examinar una partícula microscópica esférica que se encuentra en el seno de un fluido, se observa un movimiento irregular. Cuando se marcan las posiciones de la partícula a intervalos de tiempo  $\Delta t$ , se obtienen representaciones como la que aparece en la figura 1.

La interpretación desarrollada por Einstein para este movimiento conduce a la expresión:

$$N_A = \frac{RT\Delta t}{3\pi\eta r^2} \quad (1)$$

Donde  $N_A$  es la constante de Avogadro,  $R$  la constante de los gases,  $T$  la temperatura absoluta,  $\Delta t$  el tiempo transcurrido entre dos posiciones consecutivas,  $\eta$  el coeficiente de viscosidad del líquido,  $r$  el radio de la partícula y  $\bar{x}^2$  el desplazamiento cuadrático medio de la partícula a lo largo de un eje en el tiempo  $\Delta t$ .

Si se seleccionan dos posiciones consecutivas cualesquier de la figura 1, el desplazamiento,  $l$ , es (figura 2):

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = l^2 \quad (2)$$

Cuando se considera un gran número de desplazamientos puede escribirse:

$$\sum(\Delta x)^2 + \sum(\Delta y)^2 = \sum l^2 \quad (2)$$

Al tratarse de un movimiento irregular será:

$$\sum(\Delta x)^2 = \sum(\Delta y)^2 \quad (2)$$

Por tanto:

$$\sum(\Delta x)^2 = \frac{1}{2} \sum l^2 \quad (2)$$

El valor  $\bar{x}^2$  de la expresión (1) es la media de los términos  $\sum(\Delta x)^2$ .

## Material

### Partículas de estudio

Gránulos de colofonia. Se disuelven 0,5 g de colofonia (aprox.) en 10 mL de etanol. Después se toma 1 mL de esta disolución y se vierte en 100 mL de agua destilada sin dejar de remover. Se deja sedimentar y el líquido, de aspecto turbio, que contiene partículas esféricas de resina, se guarda.

Debido al grado de dilución efectuado puede considerarse que el coeficiente de viscosidad del líquido es aproximadamente el del agua a la misma temperatura.

### Microscopio

Microscopio óptico con objetivo de 100× y ocular micrométrico. Un objetivo de esta potencia se diseña para trabajar por inmersión en aceite, lo que proporciona su máxima resolución. No obstante, la supresión del aceite no perjudica apreciablemente los resultados y simplifica la tarea.

Cuando se trabaja con objetivos acromáticos resulta muy conveniente poner en el portafiltros del condensador del microscopio un filtro verde o azul-verdoso y un filtro anticalórico. Con un microscopio sin iluminación incorporada y con espejo puede improvisarse un sistema de iluminación muy eficaz que consiste (figura 3) en un LED verde de alto brillo, alimentado con dos pilas de 1,5 V y situado en el foco de una lente colimadora de, aproximadamente, 4 cm de diámetro y 5 cm de distancia focal. Ajustando el condensador del microscopio se forma una imagen del LED en el plano del portaobjetos. Este sistema, conocido como *iluminación crítica*, ofrece tan buena resolución como la costosa *iluminación Köhler*, y sin efectos caloríficos.

### Cámara fotográfica

Puede utilizarse una cámara réflex sin objetivo o una compacta, con objetivo próximo al ocular micrométrico del microscopio, con un sistema de acoplamiento que asegure la coincidencia de los ejes ópticos de ambos instrumentos (figura 4).

### Ocular micrométrico

Un ocular micrométrico contiene un disco de vidrio con una escala grabada que debe calibrarse. Una forma de hacerlo es a partir de las pistas de un DVD.

Se separan con un bisturí las dos coronas que forman el DVD y se observan las pistas de una de ellas con el objetivo de 100× y el ocular micrométrico (figura 5). Se sabe que la separación de dos pistas consecutivas es de 0,74 μm por lo que si se hace coincidir

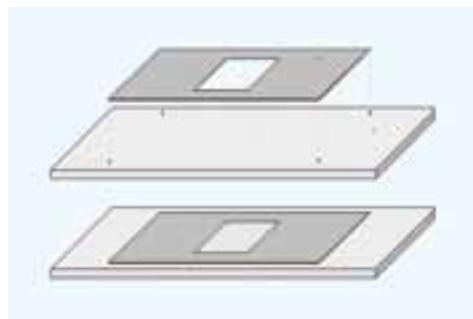
un número  $a$  de divisiones del ocular con un número  $b$  de pistas del DVD, cuya separación es  $c$ , la longitud de cada división ocular,  $d$  es:

$$d = \frac{b}{a} \cdot c$$

En nuestro caso,  $a = 60$  divisiones de ocular coinciden con  $b = 71$  pistas del DVD (error de  $\pm 1$ , en el caso más desfavorable), cuya separación es  $c = 0,74 \mu\text{m/pista}$  (error de  $\pm 0,01$ ). Por tanto:

$$d = \frac{71 \text{ pistas}}{60 \text{ div. ocular}} \times 0,74 \mu\text{m/pista} = 0,87 \mu\text{m/división}$$

$$\Delta d = \pm 0,02 \mu\text{m/división}$$



**Fig. 6.** La lámina a de PVC, con un hueco cuadrado en el centro, se pega sobre el portaobjetos b.

### Portaobjetos

Aunque puede utilizarse un portaobjetos normal, es más conveniente que la suspensión a examinar se ponga en una oquedad poco profunda. Para esto basta utilizar una delgada lámina de PVC con un hueco en el centro y pegada al portaobjetos (figura 6).

### Termómetro

La suspensión debe permanecer suficiente tiempo en la habitación de trabajo para que se alcance el equilibrio térmico. La temperatura se mide mediante un termómetro con divisiones de 1°C.

**Fig. 7.** Microscopio con cámara.

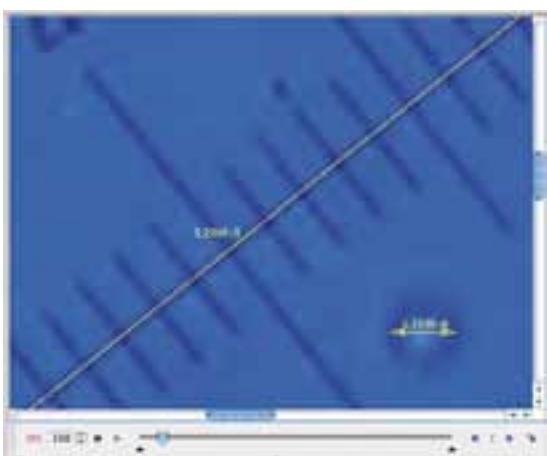


### Procedimiento experimental

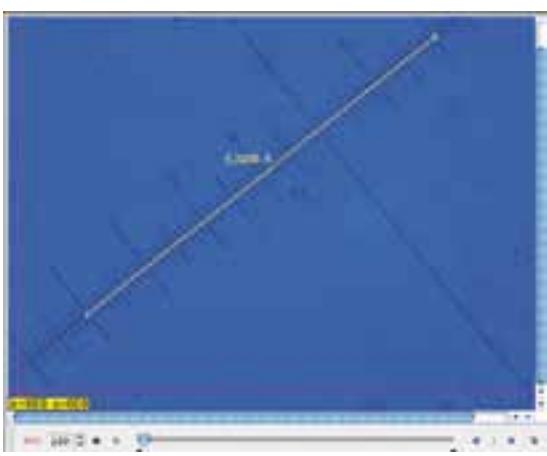
#### Grabación del movimiento

Se pone una gota de suspensión en el portaobjetos, se tapa con un cubreobjetos y se examina al microscopio con el objetivo de 100× y un ocular normal. Debe buscarse una partícula esférica cuyo movimiento se mantenga dentro del campo visual. Después se sustituye el ocular por el sistema cámara-ocular micrométrico (figura 7) y se graba en vídeo el movimiento de la partícula durante al menos

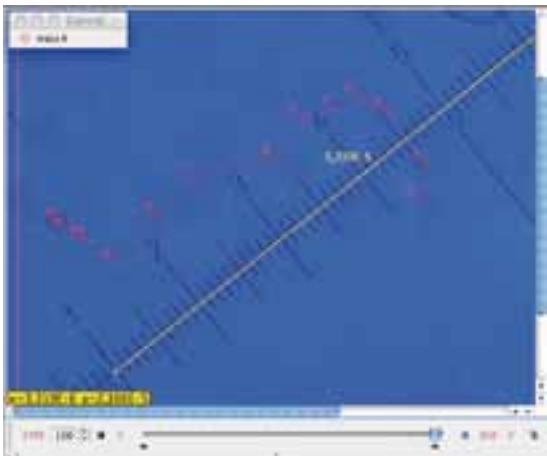
**Fig. 8.** Vara de calibración y sistema de coordenadas.



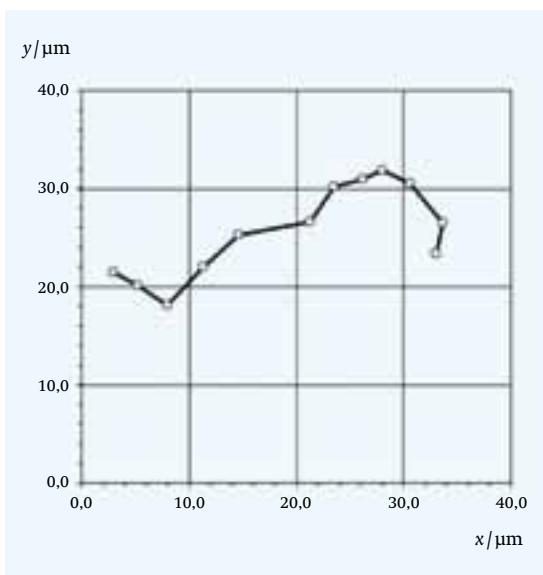
**Fig. 9.** Medida del diámetro de la partícula de colofonia.



**Fig. 10.** Ajuste para obtener intervalos de 10 s (paso de 250 cuadros).



**Fig. 11.** Seguimiento de la partícula a intervalos de 10 s.



**Fig. 12.** Desplazamiento en agua a 23 °C de una partícula de colofonia de 1,2 μm de diámetro, a intervalos de 10 s.

1,5 minutos. En la grabación quedará registrado el movimiento browniano de la partícula y la escala del ocular.

#### Análisis del movimiento

El archivo de vídeo se analiza con algún programa de seguimiento de objetos y análisis de movimientos como el programa *Tracker*, que es de uso libre. Se carga el vídeo grabado y se siguen los pasos señalados a continuación.

#### Calibración de la escala del vídeo

Si se hacen coincidir los extremos de la *vara de calibración* con las posiciones 1 y 7 de la escala micrométrica, con 60 divisiones de  $0,87 \pm 0,02 \mu\text{m}$  cada una, la vara de calibración tendrá una longitud de  $52 \pm 1 \mu\text{m}$ . Después se crea el *sistema de referencia* (figura 8).

#### Diámetro de la partícula

Con la *cinta métrica* se mide el diámetro de la partícula. En este caso la partícula de colofonia tiene un diámetro de  $1,2 \mu\text{m}$  (figura 9).

#### Trayectoria de la partícula

Se ha analizado el movimiento de la partícula cada 10 segundos. En un vídeo de 25 cuadros por segundo se ajusta el corte cada 250 cuadros (figura 10). El programa muestra entonces las posiciones y desplazamientos en el intervalo elegido (figuras 11 y 12).

Con los valores de las sucesivas coordenadas de la partícula se construye una tabla de datos (Tabla 1).

Para poder aplicar la ecuación de Einstein,  $N_A = \frac{RT\Delta t}{3\pi\eta r x^2}$ , se cuenta con los siguientes datos:

$$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$T = (273 + 23) \text{ K} = 296 \text{ K}$$

$$\Delta t = 10 \text{ s}$$

$$\text{Viscosidad del agua a } 23^\circ\text{C}, \eta = 0,933 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{Diámetro de la partícula, } d = 1,2 \mu\text{m} = 1,2 \times 10^{-7} \text{ m}$$

Con lo que se obtiene:

$$N_A = 5,5 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Tabla 1

$t / \text{s}$	$x / \text{m}$	$y / \text{m}$	$\Delta x / \text{m}$	$\Delta y / \text{m}$	$l^2 = \frac{(\Delta x)^2}{+(\Delta y)^2 / \text{m}^2}$
0	$3,30 \times 10^{-5}$	$2,34 \times 10^{-5}$	—	—	—
10	$3,36 \times 10^{-5}$	$2,65 \times 10^{-5}$	$5,76 \times 10^{-7}$	$3,13 \times 10^{-6}$	$1,01 \times 10^{-11}$
20	$3,06 \times 10^{-5}$	$3,05 \times 10^{-5}$	$-3,05 \times 10^{-6}$	$3,95 \times 10^{-6}$	$2,49 \times 10^{-11}$
30	$2,80 \times 10^{-5}$	$3,19 \times 10^{-5}$	$-2,55 \times 10^{-6}$	$1,40 \times 10^{-6}$	$8,47 \times 10^{-12}$
40	$2,62 \times 10^{-5}$	$3,10 \times 10^{-5}$	$-1,81 \times 10^{-6}$	$-9,06 \times 10^{-7}$	$4,10 \times 10^{-12}$
50	$2,35 \times 10^{-5}$	$3,01 \times 10^{-5}$	$-2,72 \times 10^{-6}$	$-8,23 \times 10^{-7}$	$8,06 \times 10^{-12}$
60	$2,13 \times 10^{-5}$	$2,66 \times 10^{-5}$	$-2,22 \times 10^{-6}$	$-3,54 \times 10^{-6}$	$1,75 \times 10^{-11}$
70	$1,47 \times 10^{-5}$	$2,53 \times 10^{-5}$	$-6,59 \times 10^{-6}$	$-1,32 \times 10^{-6}$	$4,51 \times 10^{-11}$
80	$1,14 \times 10^{-5}$	$2,21 \times 10^{-5}$	$-3,29 \times 10^{-6}$	$-3,21 \times 10^{-6}$	$2,12 \times 10^{-11}$
90	$8,00 \times 10^{-6}$	$1,81 \times 10^{-5}$	$-3,38 \times 10^{-6}$	$-3,95 \times 10^{-6}$	$2,70 \times 10^{-11}$
100	$5,22 \times 10^{-6}$	$2,01 \times 10^{-5}$	$-2,78 \times 10^{-6}$	$1,96 \times 10^{-6}$	$1,16 \times 10^{-11}$
110	$2,98 \times 10^{-6}$	$2,14 \times 10^{-5}$	$-2,24 \times 10^{-6}$	$1,33 \times 10^{-6}$	$6,81 \times 10^{-12}$

$$\sum l^2 = 1,85 \times 10^{-10} \text{ m}^2$$

$$\sum (\Delta x)^2 = \frac{1}{2} \sum l^2 = 9,25 \times 10^{-11} \text{ m}^2$$

$$\bar{x}^2 = \frac{\sum (\Delta x)^2}{11} = 8,41 \times 10^{-12} \text{ m}^2$$

## Conclusión

El procedimiento anterior se ha aplicado a diferentes partículas de colofonia para intervalos de tiempo de 10 s, 5 s y, en algunos casos, 2 s. Los datos se resumen en la tabla siguiente.

Tabla 2. Colofonia

Partícula	Diámetro $d / \mu\text{m}$	Temperatura $t / ^\circ\text{C}$	Intervalos de tiempo $\Delta t / \text{s}$	Número de desplazamientos	Const. de Avogadro $N_A / \text{mol}^{-1}$
1	1,2	23,0	10	11	$5,5 \times 10^{23}$
1	1,2	23,0	5	22	$5,7 \times 10^{23}$
2	1,2	23,0	10	11	$4,8 \times 10^{23}$
2	1,2	23,0	5	30	$5,5 \times 10^{23}$
3	1,5	23,0	10	9	$4,2 \times 10^{23}$
3	1,5	23,0	5	18	$4,8 \times 10^{23}$

Los resultados podrían mejorarse realizando medidas con intervalos de tiempo grandes y un mayor número de desplazamientos. En la práctica esta condición está limitada por el tiempo que la partícula permanece dentro del campo visual del microscopio.

No obstante, conviene comparar estos resultados con los de Perrin. El método utilizado por él en 1908 [4] es ligeramente diferente al que aplicó más tarde, que es el de este trabajo. En esas primeras determinaciones medía el desplazamiento de un número variable de partículas —entre 30 y 50—, todas de igual tamaño, en intervalos de tiempo comprendidos entre 30 segundos y 120 segundos. Los resultados correspondientes a tres series de medidas proporcionaron valores para la constante de Avogadro comprendidos entre  $5,7 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  y  $9,4 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

## Referencias

- [1] Cuando se describe el movimiento browniano es frecuente encontrar el error de que Robert Brown observó el movimiento aleatorio de granos de polen. El propio título del artículo de Brown ya deja claro que la observación se refiere a partículas que se hallan en el interior de tales granos. Dado el tamaño que suelen tener los granos de polen es difícil, en la práctica, que puedan observarse sus movimientos. Véase: R. BROWN, *Philosophical Magazine* **4**, 161 (1828).
- [2] J. LOSCHMIDT, *Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien* **52**(2), 395 (1865). Versión en inglés [en línea]: <http://www.chemteam.info/Chem-History/Loschmidt-1865.html>
- [3] A. EINSTEIN, *Annalen der Physik* **17**, 549 (1905). Versión española en Einstein 1905: un año milagroso. Cinco artículos que cambiaron la física, J. Stachel (ed.) (Crítica, 2001).
- [4] J. PERRIN, *Annales de Chimie et de Physique* **18**, 5 (1909).
- [5] J. PERRIN, *Atoms* (D. Van Nostrand Company, 1916). Es traducción del original: *Les Atomes* (Felix Alcán, 1913).
- [6] R. SALMON, C. ROBBINS, C. y K. FORINASH, *European Journal of Physics* **23**, 249 (2002).
- [7] [P. NAKROSHIS, M. AMOROSO, J. LEGERE y C. SMITH, *American Journal of Physics* **71**, 568 (2003)].
- [8] L. BRUBACHER, *CHEM-13news* **339**, 14 (2006).
- [9] R. NEWBURG, J. PEIDLE y W. RUECKNER, *American Journal of Physics* **74**, 478 (2006).
- [10] J. M. RODRÍGUEZ PARRONDO, *Revista Española de Física* **19** (1), 19 (2005).

Alejandro del Mazo Vivar  
IES Francisco Salinas  
[mazovivar@gmail.com](mailto:mazovivar@gmail.com)