

Las medidas ideales y el problema de entender la mecánica cuántica

Adán Cabello

¿Cuál es el origen físico de la mecánica cuántica? Según un resultado reciente, las correlaciones que permite la teoría cuántica para medidas ideales son indistinguibles de las que se observarían en un universo regido por el principio de que «la única ley es que no hay ninguna ley».

Uno de los problemas más antiguos de la física moderna es de dónde viene la mecánica cuántica. La observación de la importancia que tienen en Física las cantidades conservadas y los observables que se pueden medir repetidamente sin que su resultado cambie nos lleva a preguntarnos cuál es la teoría de probabilidades más general posible para los eventos producidos por medidas de observables de este tipo. Aquí introducimos las definiciones y herramientas para demostrar que, sorprendentemente, esa teoría más general posible es la teoría cuántica de probabilidades.

Introducción

En 1964, Richard Feynman pronunció una frase que sigue causando revuelo: “Creo que puedo decir con seguridad que nadie entiende la mecánica cuántica” [1]. Se refería a que nadie es capaz de derivar la mecánica cuántica a partir de unos principios físicos básicos, tal y como sí se puede hacer con, por ejemplo, la teoría de la relatividad especial [2]. La situación ha cambiado bastante en los últimos 20 años.

Un primer paso ha sido darse cuenta de que la mecánica cuántica está formada por dos capas distintas. La primera capa es una teoría abstracta de probabilidades que puede estudiarse y que *debería enseñarse* [3, 4] independientemente de sus aplicaciones en Física. Esta capa fundamental es un conjunto de reglas para predecir las distribuciones de probabilidad de los resultados de una serie de posibles *medidas* futuras sobre (copias similarmente preparadas de) un sistema físico. La teoría no habla de *propiedades* del sistema físico, sino de las distribuciones de probabilidad de *observables* que *podrían* medirse haciendo interaccionar el sistema físico con otros dispositivos. El espacio muestral de esta teoría está formado por sucesos elementales del tipo: “al medir el observable A sobre un sistema preparado en el estado φ el resultado es a ”, que denotaremos por $(A = a|\varphi)$.

Lo raro de esta teoría es cómo se representan matemáticamente en ella los estados, observables y sucesos, y cómo se usan estas representaciones para calcular probabilidades. En su formulación más sencilla, las tres reglas en las que se basa la teoría son (véase, p. ej., [5]):

1. Cada “estado cuántico” de máxima información de un “sistema cuántico”¹ se representa por un rayo en un espacio de Hilbert complejo (vectores proporcionales representan el mismo estado). En ausencia de reglas de superselección, cualquier rayo representa un estado. Cada simetría del espacio de estados cuánticos se representa por una transformación unitaria o antiunitaria.
2. Cada observable se representa por un operador autoadjunto. Los únicos resultados posibles al medir un observable son los autovalores del operador que lo representa (recuérdese que los autovalores de un operador autoadjunto son números reales). En ausencia de reglas de superselección, cualquier operador autoadjunto representa un observable.
3. Regla de Born. Si el estado es el representado por $|\varphi\rangle$ y se hace una medida del observable maximal A (representado por un operador autoadjunto de espectro no degenerado), la probabilidad de que el resultado sea el asociado al autovalor a es $p(A = a|\varphi) = |\langle A = a|\varphi\rangle|^2$, donde $\langle A = a|$ es el transpuesto del complejo conjugado de $|A = a\rangle$, que es al autovector del operador asociado a A correspondiente al resultado/autovalor a (recuérdese que los autovectores de un operador autoadjunto son ortogonales entre sí).

Esta teoría de probabilidades es a lo que, de aquí en adelante, llamaremos *teoría cuántica* (TC) (como, p. ej., [7, 8]).

La segunda capa de la mecánica cuántica está formada por las herramientas que se usan para adaptar la TC a problemas de mecánica y electromagnetismo. En esta capa están, por ejemplo, las reglas de cuantización, las simetrías y cantida-

¹ La definición de un “sistema cuántico” requiere tanto un sistema físico como un dispositivo de medida. El “estado cuántico” que se asocia a un sistema físico es *relativo* al dispositivo de medida con el que podría interactuar el sistema físico en el futuro. Por ejemplo, un fotón individual es un sistema físico, pero todavía no es un sistema cuántico. Si se hiciese pasar el fotón por una matriz de divisores de haz con d salidas con un detector de fotones en cada una de ellas, como se describe en [6], entonces el conjunto fotón-dispositivo definiría un sistema cuántico de dimensión d o *qudit*. Nótese que el que el sistema cuántico sea un qubit ($d = 2$) o un qudit de dimensión superior no es una propiedad intrínseca del fotón, sino que depende del dispositivo que se use.

des conservadas, los hamiltonianos, la ecuación de Schrödinger, y las reglas de superselección. En este artículo nos concentraremos en la primera capa, en la creencia de que es ahí donde reside la rareza de la mecánica cuántica.

Para los que nunca han oído hablar de la mecánica cuántica, toparse con ella por primera vez produce enorme extrañeza. ¿De dónde salen esa representación matemática y esas reglas para calcular probabilidades? La mayoría de los que la usan y la enseñan se han acostumbrado a que la teoría siempre dé respuestas correctas. Quizá por eso, ni cuestionan su validez ni se hacen la pregunta que corroía a John Wheeler: “¿De dónde viene la mecánica cuántica?” [9]. Si no contestamos esa pregunta, seguirá siendo cierto que usamos y enseñamos la mecánica cuántica sin entenderla.

Pero, si es cierto que la rareza de la mecánica cuántica reside en la primera capa, o sea, la TC, ¿es posible derivar la TC a partir de principios físicos?

Desde 2001, existen varias derivaciones o “reconstrucciones” de la TC a partir de axiomas más o menos sencillos, p. ej., [7, 8, 10, 11]. Típicamente se critican estas derivaciones diciendo que no se basan en principios físicos [12], que incluyen axiomas dudosos [13], y que no han ayudado a entender de dónde viene la TC, ni resuelven el problema de la interpretación de la mecánica cuántica [14]. Sin embargo, el marco en el que se han realizado estas derivaciones sí que nos ha enseñado muchas cosas interesantes.

La idea común en todos estos trabajos es considerar que la TC es una teoría de probabilidades que forma parte de un universo mucho más grande de posibles teorías de probabilidades. Lo que hacen estas derivaciones es ir parcelando ese universo mediante axiomas, hasta que la única superviviente es la TC. Sin embargo, en ese mismo marco, otros trabajos han seguido una estrategia muy interesante: preguntarse qué significan *operacionalmente* determinadas reglas de la TC cuando se analizan sin saber nada de la TC (p. ej., [15, 16]).

En este artículo vamos a hablar precisamente de un resultado que nace de adoptar esta perspectiva. Dejaremos de lado las matemáticas de la TC y nos preguntaremos qué ve una persona en un universo que se rige por esas matemáticas.

Observables compatibles y medidas ideales

Si medimos el número de extremidades de un ser humano, probablemente obtendremos “cuatro” como resultado. Y este resultado no cambia si repetimos la medida. No cambia incluso cuando, entre la primera y la segunda medida, medimos el número de ojos del ser humano. Podemos, incluso, medir a la vez ambos observables (el número de extremidades y el número de ojos) sin que la medida de uno de ellos afecte al resultado de la medida del otro.

Un observable se puede medir de formas distintas. Por eso hay que distinguir entre el observable y su medida. El observable agrupa a todas las medidas que producen la misma distribución de probabilidad para cada estado inicial. Lo que pase con el sistema físico después de que se haya generado el resultado es otro cantar.

La Ciencia parece tener un particular interés por las cosas que no cambian. Y, en el caso de las medidas, por aquellas que arrojan resultados persistentes y que permiten seguir haciendo medidas que, a su vez, arrojan resultados persistentes.

Este interés es el que lleva a la siguiente definición:

Dos observables, A y B , son *compatibles* si existe un observable C tal que, para todo estado φ , para cada resultado a su probabilidad cumpla $p(A = a|\varphi) = \sum_{c_a} p(C = c_a|\varphi)$, y para cada resultado b su probabilidad cumpla $p(B = b|\varphi) = \sum_{c_b} p(C = c_b|\varphi)$. Si no existe C , entonces se dice que los observables A y B son *incompatibles*.

Si A y B son observables compatibles, se dice que cada uno de ellos es una *versión de menor resolución* del observable C definido antes. Y entonces C se dice que es un *refinamiento* de A (y de B). Dicho de otro modo, dos observables son compatibles cuando tienen un refinamiento común.

Se dice que una medida de un observable *perturba* a otro observable cuando la primera cambia la distribución de probabilidad del segundo. La definición de incompatibilidad implica que cualquier medida de un observable perturba los observables que son incompatibles con él. Pero el que dos observables sean compatibles no garantiza que cualquier medida de uno de ellos no perturbe al otro. Por ello es importante identificar qué observables compatibles se pueden medir uno tras otro sin que la medida (menos perturbativa posible) de cada uno de ellos perturbe (sea cual sea el estado inicial) a los otros, con lo que el orden en que se midan los observables compatibles se volvería irrelevante.

Esto nos lleva a dos conceptos clave. El primero, es el de medida ideal de un observable.

Una *medida ideal* de un observable es aquella que no perturba ningún observable compatible.

Detengámonos a examinar algunas consecuencias de esta definición:

1. Una medida ideal de un observable arroja el mismo resultado al repetirla sobre el mismo sistema físico. Véase la Figura 1 (a).
2. Una medida ideal de un observable no perturba las distribuciones de probabilidad de medidas posteriores de observables compatibles. Véase la Figura 1 (b).
3. En particular, una medida ideal de A no perturba una medida posterior de cualquier refinamiento de A .

El segundo concepto clave es el de observable ideal.

Un *observable ideal* es aquel que cumple que tanto él como sus versiones de menor resolución se pueden medir idealmente.

Una consecuencia de esta definición es que:

4. Un observable ideal X con d posibles resultados, a, b, \dots, c , siempre se puede medir mediante una secuencia de d medidas ideales: una de ellas correspondiente a la versión de menor resolución de X con resultados a y \bar{a} ("no a "), otra correspondiente a la versión de menor resolución de X con resultados b y \bar{b} , ..., y otra correspondiente a la versión de menor resolución de X con resultados c y \bar{c} . Véase la Figura 1 (c). El orden en el que se miden idealmente las versiones de menor resolución es irrelevante.

Todas las magnitudes de la física clásica son observables ideales.

La teoría de probabilidades para observables ideales

Sin embargo, en principio, la mecánica cuántica es algo completamente distinto de la física clásica. ¿Por qué entonces defendemos la tesis de que, para entender la TC, hay que fijarse en los observables ideales?

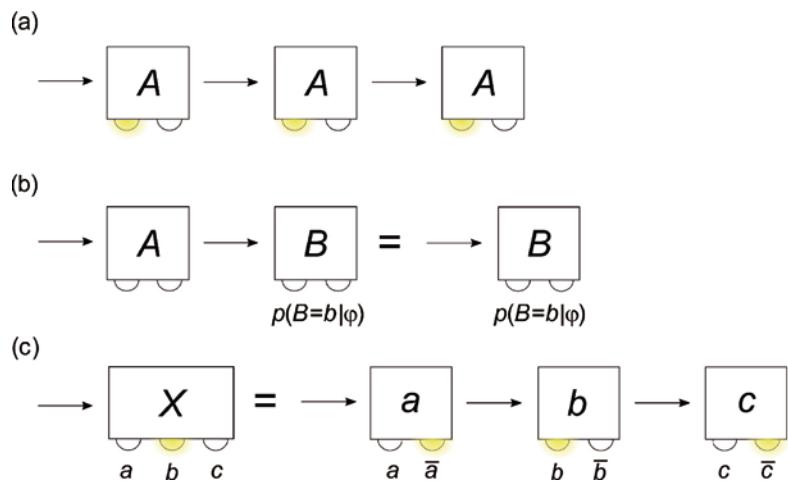
Déjenme adelantarles la respuesta: porque la TC es una teoría de probabilidades para los resultados de medidas ideales de observables ideales.

Para demostrar esto, que espero sea una afirmación en la que muchos discrepen, vamos a recordar dos "incidentes", no muy conocidos y ambos relativamente recientes, en la historia de la mecánica cuántica.

En 1932, John von Neumann publicó la que se considera la biblia de la teoría de la medición en mecánica cuántica [17]. Es ahí donde queda claramente formulada la correspondencia entre probabilidades de eventos y espacios de Hilbert complejos. Curiosamente, no es hasta 1951 que alguien, Gerhart Lüders [18] (Figura 2), se da cuenta de que algo muy importante está mal en el libro de von Neumann: la prescripción de cuál es el estado cuántico tras una medida representada por un operador autoadjunto es inconsistente con la regla de Born. Lüders corrige este error y proporciona la fórmula que, desde entonces, se considera la correcta².

¿Y por qué es tan importante la corrección de Lüders? Porque la transformación del estado que

² Por ejemplo, según la regla de Lüders, si el estado inicial es el descrito por $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y medimos el observable representado por el proyector sobre $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y obtenemos el resultado asociado al autovalor 1, entonces el estado después de la medida es el descrito por $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pero si el resultado es el asociado al autovalor 0, entonces el estado después de la medida es el descrito por $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En ambos casos el estado tras la medida es de máxima información. Sin embargo, según von Neumann, en el segundo caso el estado tras la medida sería un estado mezcla.



propone Lüders corresponde al único proceso que puede asociarse a una medición de un observable A que no perturba una medición posterior de cualquier refinamiento de A . Es decir, la transformación de Lüders es la que corresponde a una medida ideal del observable A [15, 16].

Esto implica que no es suficientemente preciso decir, como escribíamos antes, que "cada observable se representa por un operador autoadjunto". En realidad, el operador autoadjunto no representa el observable, sino una forma concreta de medir el observable. Además, puesto que en TC suponemos que cualquier operador autoadjunto corresponde a un observable, deberíamos decir: "Cada operador autoadjunto representa la medida ideal de un observable *ideal*", ya que en TC cualquiera de las versiones de menor resolución de un observable se puede medir idealmente.

Llegados a este punto, alguien podría poner una o varias de las siguientes objeciones:

- i) La forma más general de representar las medidas en mecánica cuántica *no* es mediante operadores autoadjuntos, sino mediante las denominadas *POVM*. De hecho, los tratados modernos hacen énfasis en este punto (véase, p. ej., [19]).
- ii) La mayoría de las medidas que se hacen en los laboratorios *no* son ideales, y se describen correctamente mediante POVM.
- iii) Las medidas ideales, probablemente, *no* existen en la naturaleza.

Para responder a i), conviene hablar del segundo "incidente" al que nos referímos al principio. En los años 1940, Mark A. Naimark (o Neumark, según la transliteración) (Figura 2) demostró el teorema que se llama "de dilatación" [20], que establece que cualquier POVM se puede implementar mediante un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert de dimensión superior. Esto implica que, si aceptamos la mecánica cuántica, en ausencia de reglas de superselección, *todas* las medidas no ideales que se hacen en los laboratorios podrían, en principio, hacerse de manera ideal. Dicho de otra manera, la mecánica cuántica no predice nada que no pueda,

Figura 1. (a) Para cualquier estado inicial, una medida ideal de un observable da el mismo resultado cuando se repite. **(b)** Para cualquier estado inicial, una medida ideal del observable no perturba la distribución de probabilidad de los resultados de cualquier observable compatible B . Por tanto, si solamente se tiene acceso a la distribución de probabilidad de B , entonces no es posible saber si antes se ha hecho o no una medida ideal de A .

(c) Una medida ideal de un observable ideal X con tres posibles resultados, a, b, c , se puede implementar mediante una secuencia (en orden arbitrario) de tres medidas ideales, cada una de ellas con dos posibles resultados.

en principio, conseguirse usando *sólamente* medidas ideales de observables ideales.

Ergo se puede decir que la TC es una teoría de probabilidades para los resultados de medidas ideales de observables ideales.

El que la mayoría de las medidas que se hacen en los laboratorios no sean ideales no quiere decir que no se puedan hacer medidas ideales de esos mismos observables. Lo que suele pasar es que esas medidas ideales son mucho más difíciles de hacer.

¿Son posibles las medidas ideales? Por supuesto que sí. No solo ocurre que todas las magnitudes de la física clásica son observables ideales que no es difícil medir de forma ideal, sino que, hoy en día, tenemos un control extremadamente preciso de procesos naturales que implementan medidas ideales de observables ideales no clásicos (véase, p. ej., [21]) y sabemos cómo medir, en principio, todos los observables ideales concebibles en muchos casos (véase, p. ej., [22]).

Además, conviene recordar que el progreso de la Ciencia se ha sustentado, en muchas ocasiones, en idealizaciones.

Experimentos de correlaciones

Para distinguir unas teorías de probabilidades de otras, es importante seleccionar aspectos que sean experimentalmente verificables y que, además, caractericen por sí mismos una buena parte de cada una de las teorías.

Dado el papel central que tienen en TC las medidas ideales de observables ideales, una posible elección es comparar los conjuntos de correlaciones que genera cada teoría para cada escenario compuesto por medidas ideales de observables ideales.

En nuestro caso, el concepto de *escenario* agrupa todos los experimentos en los que hay una fuente que prepara sistemas, un conjunto con un número fijo de medidas ideales de observables ideales, cada uno de ellos con un número de resultados posibles, y las relaciones de compatibilidad entre ellos. Por ejemplo, un escenario es el formado por cuatro observables abstractos A, B, C, D , cada uno con dos resultados posibles, 0 y 1, y en los que los siguientes pares son compatibles: $(A, B), (B, C), (C, D), (A, D)$.

Si consideramos *todos* los pares $(\varphi, \{A, B, C, D\})$, donde φ es un estado posible en la teoría y $\{A, B, C, D\}$ es un conjunto posible en la teoría de cuatro observables dicotómicos con las relaciones de compatibilidad mencionadas antes, generaremos el conjunto de *correlaciones* para ese escenario. Cada uno de los elementos de ese conjunto es una lista de distribuciones de probabilidad. Hay una distribución por cada subconjunto de observables mutuamente compatibles. En nuestro ejemplo, esa lista es $\{p(A = a, B = b | \varphi), p(B = b, C = c | \varphi), p(C = c, D = d | \varphi), p(A = a, D = d | \varphi)\}$, con $a, b, c, d \in \{0, 1\}$. Recuérdese que, como los observables son ideales

y compatibles, el orden en el que se hagan las medidas ideales es irrelevante.

El conjunto de los conjuntos de correlaciones que son posibles en cada escenario caracteriza, en buena medida, la teoría. En la teoría de probabilidades de observables ideales en física clásica, *para cualquier escenario*, el correspondiente conjunto de correlaciones es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos que corresponden a los casos en los que los sistemas físicos *tienen* valores predeterminados para todos los observables. Además, cada una de las distribuciones de probabilidades para un subconjunto de observables compatibles se puede obtener como distribución *marginal* de una única distribución de probabilidades. En nuestro ejemplo, de la distribución $p(A = a, B = b, C = c, D = d | \varphi)$.

Para teorías de probabilidad más generales, un teorema de Nicolai N. Vorob'ev [23] (véase la Figura 2) establece que en ciertos escenarios es posible obtener un conjunto de correlaciones *mayor que el clásico*: aquellos en los que el grafo de compatibilidad sea no cordal. El *grafo de compatibilidad* de un escenario es aquel en el que cada observable se representa por un vértice y cada pareja de observables compatibles está conectada por una arista. En nuestro ejemplo, el grafo de compatibilidad es un cuadrado. El que un grafo sea *no cordal* quiere decir que contiene, como subgrafos inducidos, ciclos de más de tres vértices (es decir, cuadrados, pentágonos, hexágonos, etc.). Por lo tanto, el grafo no cordal más sencillo es, precisamente, el cuadrado.

¿Y en cuáles de los escenarios cuyo grafo de compatibilidad es no cordal puede haber, según la TC, correlaciones *no clásicas*? *En todos* [24].

¿De dónde viene la teoría cuántica?

Para intentar responder a esta pregunta desde la perspectiva de los conjuntos de correlaciones (para escenarios con medidas ideales de observables ideales), la estrategia es clara: Para cada escenario, construyamos el conjunto de correlaciones mayor posible (i. e., permitido por la definición de medida ideal de un observable ideal y haciendo hipótesis adicionales “razonables”). Luego busquemos leyes físicas que lo parcelen hasta que, para todos los escenarios, el conjunto de correlaciones sea exactamente el que permite la TC. Esas leyes previsiblemente nos dirán algo del origen *físico* de la TC.

Consideremos como hipótesis adicional razonable la siguiente:

- (I) Es posible generar copias estadísticamente independientes de cualquier elemento del conjunto de correlaciones.

Se puede demostrar que, para cada escenario, el conjunto de correlaciones para medidas ideales de observables ideales mayor que satisface la hipótesis (I) es indistinguible del de la TC [25].



Figura 2. Tres personajes clave para entender la teoría cuántica. Solo uno de ellos, Lüders, trabajó en física cuántica, concretamente en teoría cuántica de campos. Naimark realizó contribuciones importantes en análisis funcional y teoría de grupos. Vorob'ev en teoría de juegos. Izquierda: Gerhart Lüders (1920-1995). Centro: Mark Aronovich Naimark (1909-1978). Derecha: Nicolai Nikolaelevich Vorob'ev (1925-1995). (No ha sido posible identificar a los poseedores de los derechos de estas fotografías).

La demostración

La demostración consta de tres pasos. El primero es un teorema que establece que, si tenemos un conjunto de eventos generados por medidas ideales de observables ideales compatibles y tal que los eventos son excluyentes *dos a dos*, entonces la suma de las probabilidades de los eventos de ese conjunto no puede ser mayor que 1. Esto es lo que, a veces, se llama el *principio de exclusividad*, pero que aquí no es un principio sino un teorema. Dos eventos ($A = a|\varphi$) y ($B = b|\varphi$) son mutuamente excluyentes si existe un refinamiento común de A y B tal que cada uno de esos eventos corresponde a un resultado *distinto* de ese refinamiento.

El segundo paso consiste en dividir las correlaciones que produce una teoría *no por escenarios sino por grafos de exclusividad*. En un *grafo de exclusividad* los vértices representan eventos y las parejas de eventos mutuamente excluyentes están unidas por una arista. Podemos elegir un grafo arbitrario, por ejemplo, el pentágono, y preguntarnos cómo es el conjunto de asignaciones de probabilidad que permite la teoría, sea cual sea el escenario en el que estos eventos (que tienen que satisfacer las relaciones de exclusividad dadas por el grafo) han sido generados.

En la teoría de probabilidades de observables ideales en física clásica, *para cualquier grafo*, el correspondiente conjunto de correlaciones es la envolvente convexa de los vectores característicos de los conjuntos independientes del grafo. De nuevo, en TC, es un conjunto que, para grafos no perfectos, es mayor ya que es el llamado cuerpo theta del grafo [26], que curiosamente fue introducido en los años 1980 en teoría de grafos, sin referencia alguna a la mecánica cuántica.

Lo interesante es que se puede demostrar que, para cualquier grafo, el conjunto de correlaciones que satisfacen el principio de exclusividad y la hipótesis (I) es exactamente el conjunto de correlaciones de la TC. Y en este paso ya han aparecido los espacios de Hilbert y la regla de Born que tanta extrañeza causan.

El último paso consiste en añadir las condiciones de normalización y no perturbación que son características de cada escenario, junto con el requisito de que la probabilidad de cada evento solo

puede ser función del estado y los resultados que lo definen. Véase [25] para más detalles.

Conclusión

El resultado enunciado antes (“el conjunto de correlaciones para medidas ideales de observables ideales mayor que satisface la hipótesis (I) es indistinguible del de la TC”) no constituye una derivación *completa* de la TC. Pero está muy cerca. Quedan por desarrollar detalles y, sobre todo, responder a la pregunta de por qué el espacio de Hilbert tiene que ser *Complejo* (y no basta con espacios de Hilbert reales). Hay muy buenas razones para ello. Por ejemplo, la probable imposibilidad de construir extensiones de la teoría que sean invariantes Lorentz [27, 28] y la demostrada imposibilidad de producir correlaciones en escenarios con dos fuentes independientes usando solo estados producto [29, 30]. Pero son razones que no están relacionadas con el argumento principal que hemos desarrollado en este artículo.

Para terminar, me gustaría enfrentar al lector al siguiente dilema: Supongamos que aceptamos que los observables ideales son elementos esenciales en Física. Supongamos que, efectivamente, la TC fuese la teoría de probabilidades más general posible para medidas ideales de observables ideales. ¿Qué nos estaría diciendo eso sobre el origen físico de la TC?

Una posible respuesta es el argumento de que, si esto es así, cualquier civilización científica acabará encontrando la TC, con independencia de cómo sea el universo en el que viva. Y, consecuentemente, cualquiera que haga una interpretación bayesiana de las probabilidades debería abrazar fervorosamente la TC como herramienta, con independencia de cómo sea el universo [31].

Pero el caso es que, en nuestro universo, hay sistemas físicos e interacciones sobre ellos que permiten generar experimentalmente cualquier correlación entre medidas ideales permitida por la TC. Esa es una forma corta de decir que, en nuestro universo, es posible preparar cualquier estado e implementar cualquier medida ideal de un observable ideal permitida por la TC (véase, p. ej., [22]). Ante esa evidencia, lo más sencillo es concluir que, al menos en lo que se refiere a esos sistemas físicos e interacciones, la única ley de la naturaleza es que no hay ninguna ley [28].

Agradecimientos

El autor quiere dar las gracias a Antonio J. López Tarrida por sus comentarios sobre el texto. Nuestras investigaciones están financiadas por el proyecto Qdisc (US-15097), con fondos FEDER, y el proyecto QuantERA SECRET (MINECO, PCI2019-111885-2).

Referencias

- [1] R. P. FEYNMAN, *The Character of Physical Law* (M.I.T. Press, 1965). El momento en el que Feynman pronuncia la famosa frase se puede ver, en vídeo, en: <https://youtu.be/w3ZRLlIWgHI>
- [2] A. EINSTEIN, *Sobre la teoría de la relatividad especial y general* (Alianza, 2012).
- [3] S. AARONSON, *Quantum Computing since Democritus* (Cambridge University Press, 2013).
- [4] L. MASANES y M. P. MÜLLER, “Information-theoretic Postulates for Quantum Theory”, en *Quantum Theory: Informational Foundations and Foils*, Fundamental Theories of Physics 181, editado por G. Chiribella y R. W. Spekkens (Springer, 2016), p. 139.
- [5] C. H. ISHAM, *Lectures on Quantum Theory. Mathematical and Structural Foundations* (Imperial College Press, 1995).
- [6] M. RECK, A. ZEILINGER, H. J. BERNSTEIN y P. BERTANI, “Experimental Realization of any Discrete Unitary Operator”, *Phys. Rev. Lett.* 73, 58 (1994).
- [7] L. HARDY, “Quantum Theory from Five Reasonable Axioms”, *quant-ph/0101012* (2001).
- [8] G. CHIRIBELLA, G. M. D’ARIANO y P. PERINOTTI, “Informational Derivation of Quantum Theory”, *Phys. Rev. A* 84, 012311 (2011).
- [9] J. A. WHEELER, “How Come the Quantum?”, en *New Techniques and Ideas in Quantum Measurement Theory*, *Ann. N. Y. Acad. Sci.* 480, 304 (1986).
- [10] L. MASANES y M. P. MÜLLER, “A Derivation of Quantum Theory from Physical Requirements”, *New J. Phys.* 13, 063001 (2011).
- [11] H. BARNUM, M. P. MÜLLER y C. UDUDEC, “Higher-order Interference and Single-System Postulates Characterizing Quantum Theory”, *New J. Phys.* 16, 123029 (2014).
- [12] C. A. FUCHS y B. C. STACEY, “Some Negative Remarks on Operational Approaches to Quantum Theory”, en *Quantum Theory: Informational Foundations and Foils*, Fundamental Theories of Physics 181, editado por G. Chiribella y R. W. Spekkens (Springer, 2016), p. 283.
- [13] M. NAVASCUÉS, “Teorías supercuánticas”, *Investigación y Ciencia* 480, septiembre de 2016, p. 66.
- [14] L. HARDY, en “Quantum Theory Rebuilt from Simple Physical Principles”, de P. Ball, *Quanta Magazine*, 2017 (<https://bit.ly/3ua5TOA>)
- [15] M. KLEINMANN, “Sequences of Projective Measurements in Generalized Probabilistic Models”, *J. Phys. A* 47, 455304 (2014).
- [16] G. CHIRIBELLA y X. YUAN, “Bridging the Gap Between General Probabilistic Theories and the Device-Independent Framework for Nonlocality and Contextuality”, *Information and Computation* 250, 15 (2016).
- [17] J. von NEUMANN, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Springer-Verlag, 1932). Edición más reciente en español: *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica* (CSIC, 2018).
- [18] G. LÜDERS, “Über die Zustandsänderung durch den Mebprozeß”, *Ann. Phys. (Leipzig)* 8, 322 (1951). Versión en inglés: “Concerning the State-change Due to the Measurement Process”, *Ann. Phys. (Leipzig)* 15, 663 (2006).
- [19] M. A. NIELSEN e I. CHUANG, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000).
- [20] M. A. NEUMARK, “Self-adjoint Extensions of the Second Kind of a Symmetric Operator”, *Izv. Akad. Nauk S.S.R. [Bull. Acad. Sci. U.S.S.R.] Sér. Mat.* 4, 53 (1940); “Spectral Functions of a Symmetric Operator”, *Izv. Akad. Nauk S.S.R. [Bull. Acad. Sci. U.S.S.R.] Sér. Mat.* 4, 277 (1940); “On a Representation of Additive Operator Set Functions”, *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. U.R.S.S. (N. S.)* 41, 359 (1943).
- [21] F. POKORNÝ, C. ZHANG, G. HIGGINS, A. CABELLO, M. KLEINMANN y M. HENNICH, “Tracking the Dynamics of an Ideal Quantum Measurement”, *Phys. Rev. Lett.* 124, 080401 (2020).
- [22] B. ROUSSEAU, S. GUÉRIN y N. V. VITANOV, “Arbitrary Qudit Gates by Adiabatic Passage”, *Phys. Rev. A* 87, 032328 (2013).
- [23] N. N. VOROB’EV, “Consistent Families of Measures and their Extensions”, *Theory Probab. Appl.* 7, 147 (1962).
- [24] Z.-P. XU y A. CABELLO, “Necessary and Sufficient Condition for Contextuality from Incompatibility”, *Phys. Rev. A* 99, 020103 (2019).
- [25] A. CABELLO, “Quantum Correlations from Simple Assumptions”, *Phys. Rev. A* 100, 032120 (2019).
- [26] A. CABELLO, S. SEVERINI y A. WINTER, “Graph-theoretic Approach to Quantum Correlations”, *Phys. Rev. Lett.* 112, 040401 (2014).
- [27] V. MORETTI y M. OPPIO, “Quantum Theory in Real Hilbert Space: How The Complex Hilbert Space Structure Emerges from Poincaré Symmetry”, *Rev. Math. Phys.* 29, 1750021 (2017).
- [28] A. CABELLO, “The Problem of Quantum Correlations and the Totalitarian Principle”, *Philos. Trans. R. Soc. A* 377, 2019.0136 (2019).
- [29] M.-O. RENOU, D. TRILLO, M. WEILENMANN, L. P. THINH, A. TAVAKOLI, N. GISIN, A. ACÍN y M. NAVASCUÉS, “Quantum Physics Needs Complex Numbers”, arXiv: 2101.10873 (2021).
- [30] M.-C. CHEN *et al.*, “Ruling Out Real-number Description of Quantum Mechanics”, arXiv:2103.08123 (2021).
- [31] G. CHIRIBELLA, A. CABELLO, M. KLEINMANN y M. P. MÜLLER, “General Bayesian Theories and the Emergence of the Exclusivity Principle”, *Phys. Rev. Research* 2, 042001(R) (2020).

Adán Cabello

Dpto. de Física Aplicada II
e Instituto Carlos I de Física Teórica
y Computacional, Universidad
de Sevilla

