

Átomos a muy baja temperatura: de condensación de Bose-Einstein a sistemas altamente correlacionados

J. J. García-Ripoll, B. Paredes, J. I. Cirac

Revisamos algunos de los últimos logros en el estudio de los condensados de Bose-Einstein: creación y manipulación de vórtices, creación de "entanglement", efecto Hall cuántico y átomos fríos fuertemente correlacionados en redes ópticas.

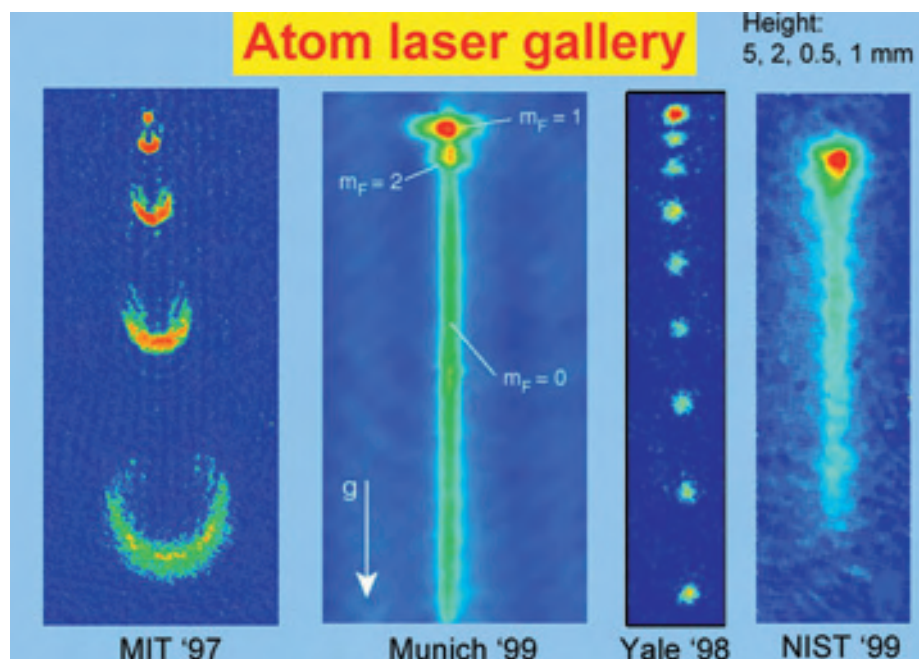
El fenómeno conocido como condensación de Bose-Einstein (CBE) fue predicho en 1924 por Einstein [1] para un gas ideal, y posteriormente generalizado por London, Landau y Bogoliubov [2] para átomos debilmente interactuantes. Este efecto, de naturaleza puramente cuántica, ocurre cuando un gas de bosones alcanza una temperatura muy baja y una densidad muy alta, y se manifiesta en que todas las partículas tienden a ocupar el mismo estado cuántico. Sin embargo, aunque a lo largo del siglo XX se encontraron evidencias experimentales de la CBE en campos tan dispares como superfluidez, superconductividad, Física nuclear y QCD [3]; en todos estos experimentos las interacciones son muy fuertes, la descripción teórica es mucho más complicada y la condensación juega un papel marginal.

Esta era la situación hasta que en 1995 tres grupos experimentales obtuvieron condensados de Bose-Einstein utilizando gases de átomos alcalinos confinados magnéticamente [4]. El primer condensado se consiguió en el grupo de E. Cornell y C. Wieman (Colorado, EE. UU.) enfriando átomos de rubidio. Poco después ese mismo año el grupo de R. Hulet en la Universidad de Rice (Houston, EE. UU.) y el grupo de

W. Ketterle en el MIT (Cambridge, EE. UU.) lograron "condensar", respectivamente, átomos de litio y sodio. Desde entonces más de treinta laboratorios en todo el mundo han conseguido producir condensados, añadiendo nuevas especies atómicas a la lista, como helio, potasio e hidrógeno [5].

Como lo demuestra el premio Nóbel de Física otorgado a E. Cornell, C. Wieman y W. Ketterle en el año 2001, la investigación de los átomos a muy bajas temperaturas es un campo consolidado y en rápido desarrollo. En este artículo ofreceremos una breve panorámica del campo, concentrándonos en los descubrimientos de los últimos años. Comenzaremos por definir qué es la CBE y qué relación guarda con la Mecánica Cuántica; resumiremos algunos resultados interesantes, experimentales y teóricos; y, por último, mencionaremos las líneas de investigación que permanecen abiertas.

Brevemente, el condensado de Bose-Einstein es un nuevo estado de la materia que sólo puede ser descrito mediante la Mecánica Cuántica. A temperaturas del orden de los microkelvin y trabajando con gases alcalinos muy diluidos (densidades del orden de 10^{14} cm^{-3} para sodio), el estado de un colectivo de átomos de naturaleza bosónica viene descrito por una función de onda de la forma



$$\Psi_c(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) \equiv \phi(\mathbf{x}_1, t) \dots \phi(\mathbf{x}_N, t); \quad (1)$$

esto es, todos los átomos comparten el mismo estado cuántico. Para que la condensación tenga lugar con átomos reales necesitamos, además de las condiciones descubiertas por Einstein (baja temperatura y alta densidad), que la interacción entre átomos sea de corto alcance (típico para átomos neutros) y que la distancia interatómica promedio sea grande (bajas densidades), para que los átomos no formen moléculas.

En la ecuación (1) vemos que el condensado no es sino un estado cuántico de naturaleza macroscópica: cada átomo tiene asociada la misma función de onda, que puede alcanzar una extensión de micras. Hay varias propiedades que merece la pena resaltar. En primer lugar, la función de onda Ψ_c es simétrica respecto del intercambio de dos átomos, hecho que resulta de la indistinguibilidad de los átomos y de su carácter bosónico. En segundo lugar, ϕ tiene una interpretación sencilla: $N |\phi(\mathbf{x}, t)|^2$ es la densidad de bosones en el entorno del punto \mathbf{x} . Por último, el ansatz (1) sigue siendo válido incluso cuando actuamos ligeramente sobre el sistema. Eso quiere decir, por ejemplo, que si agitamos la trampa que confina al condensado, o si imponemos una cierta rotación a esta, todos los átomos evolucionan de igual manera, o como se ha venido diciendo, “cantan al unísono”.

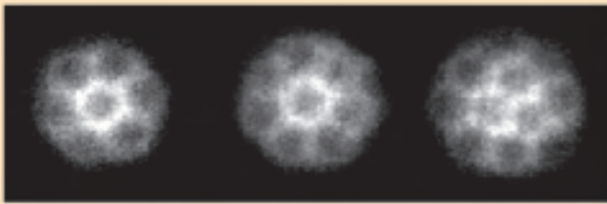


Figura 1. Vistas superiores de un condensado rotando con tres diferentes velocidades angulares. En ellas se aprecian 7, 8 y hasta 11 vórtices como depresiones de la densidad (Imágenes tomadas de la Ref. [9]).

Las primeras verificaciones experimentales de la condensación se basaron en estudiar los perfiles de densidad del gas (el condensado es más denso que la nube de átomos calientes que lo rodea), la distribución de velocidades que resulta al liberarlo y las frecuencias de oscilación de la nube, cuando ésta es ligeramente deformada [6]. Todos esos datos se contrastaron con teorías de campo medio que nos dicen cómo debe ser la función $\phi(\mathbf{x}, t)$, encontrando un acuerdo casi perfecto. Esto indica que la descripción teórica de estos átomos a baja temperatura es la adecuada [7].

Una vez sentadas las bases experimentales y teóricas, surgieron numerosas cuestiones. Entre ellas, la existencia de una conexión entre superfluides y condensación de Bose-Einstein, como se viene suponiendo desde los primeros trabajos con Helio-IV [2]. Vagamente, se entiende por superfluido un líquido o gas que fluye sin resistencia y en el que se pueden establecer corrientes circulares (“remolinos” o “vórtices”) que sobreviven a pequeñas perturbaciones del entorno. El ansatz (1) contiene de hecho estados con corrientes circulares. Por ejemplo, un remolino de carga unidad en el centro de la nube tiene la forma

$$\phi(\mathbf{x}) = \sqrt{\rho(\mathbf{x})} e^{i \arctan(x/y)}, \quad (2)$$

donde ρ es la densidad del gas y el campo de velocidades $\mathbf{v} \propto \text{Im}(\phi \nabla \phi)$ rota alrededor del origen.

Para generar vórtices uno debe sencillamente imponer velocidad angular al condensado. Se puede, por ejemplo, deformar ligeramente la trampa que lo confina y hacerla girar [8]. De acuerdo con la velocidad de rotación empleada, se generarán uno, dos, tres o más vórtices. Desde el punto de vista experimental, en el centro de cada vórtice se produce una disminución de la densidad, lo que permite su observación [Figura 1]. A mayor número de átomos, mayor es el número de vórtices que la nube puede albergar. Así, en el grupo de W. Ketterle en el MIT se han conseguido crear condensados con hasta 150 vórtices. Cuando el número de vórtices es lo bastante grande estos se agrupan formando redes regulares que pueden ser manipuladas a voluntad. El estudio de estas redes, su forma, sus propiedades elásticas, son un tema abierto, con posibles repercusiones en otros campos (superconductividad, astrofísica y óptica no lineal).

La importancia de los condensados de Bose-Einstein radica, no sólo en que se trata de un nuevo estado de la materia, sino en sus posibles aplicaciones. Entre ellas destaca el desarrollo de un “láser de átomos” [10], que no es sino un haz de bosones con unas propiedades de coherencia similares a las de un haz láser, pero con una longitud de onda ajustable y que puede ser mucho menor que las de un láser convencional. Semejante dispositivo se podrá emplear en litografía (p. ej. para imprimir precisos circuitos) y en metrología (aprovechando la capacidad de los átomos para hacer interferencia [11], o simplemente como fuente de átomos fríos).

La importancia de los condensados de Bose-Einstein radica en el posible desarrollo de un “láser de átomos”

Más recientemente, los condensados han demostrado ser un buen punto de partida para generar otros estados cuánticos, bastante más complicados que el simple producto (1). La idea fundamental es que el condensado nos proporciona una configuración bien definida (1), que podemos manipular mediante láseres, campos magnéticos, divisores de haz, etc, de forma controlada. Por ejemplo, en la referencia [12] se propone alterar el estado interno de los átomos del condensado (por ejemplo, niveles hiperfinos $|F=1, m_F=1\rangle$ y $|F=1, m_F=-1\rangle$), de manera que al final cada átomo se encuentre en una superposición cuántica de ambos

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-1\rangle. \quad (3)$$

Al excitar los átomos en la superposición (3), dejamos de tener una configuración estable. Antes bien, las colisiones entre átomos mezclan sus estados internos, de manera que, aunque el perfil de densidad permanece constante, desde el punto de vista de cada átomo, el sistema adopta un estado “entrelazado” (“entangled” en la literatura anglosajona). Las propiedades de los estados entrelazados son interesantes desde un punto de vista fundamental: en esencia, el entrelazado nos dice que si extraemos átomos del condensado y

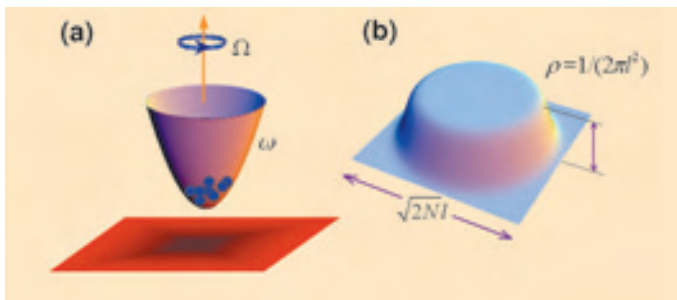


Figura 2. (a) Ilustración esquemática del sistema atómico considerado en la propuesta para crear anyons [21]. Los átomos se encuentran confinados en una trampa armónica de frecuencia ω que rota alrededor del eje z con frecuencia Ω . (b) Perfil de densidad del estado de Laughlin. La densidad es prácticamente constante en el volumen del sistema, tomando un valor $\rho = 1/(2\pi\ell^2)$, donde $\ell = \sqrt{\hbar/M\omega}$. El tamaño del sistema es $\sim \sqrt{2N}\ell$, donde N es el número de átomos.

actuamos sobre ellos, afectamos instantáneamente y de forma no trivial al resto del sistema, independientemente de lo lejos que se encuentre la fuente de átomos y el lugar donde operamos con ellos [13]. Los estados entrelazados han encontrado aplicación en comunicación cuántica, criptografía, teleportación, y, en el caso de los condensados, se podrían emplear para generar relojes atómicos mucho más precisos [14].

La mayoría de los fenómenos que hemos descrito hasta ahora tienen lugar cuando, como en los experimentos, los átomos en el gas interactúan muy débilmente entre sí y tienen un amplio volumen para moverse. En estas condiciones de baja densidad, los átomos prácticamente no se “ven” unos a otros y actúan casi como partículas independientes, condensando en el mismo estado cuántico. Sin embargo, en el régimen contrario, en el que los átomos interactúan fuertemente unos con otros, el sistema deja de comportarse como un gas de partículas independientes. Para minimizar su repulsión los átomos tratan de evitarse unos a otros ocupando estados cuánticos diferentes. Como resultado el sistema se configura en un estado fuertemente correlacionado que nada tiene que ver con un condensado de Bose-Einstein.

Si bien el régimen de condensación de Bose-Einstein ha sido estudiado en profundidad en los últimos años, el interés por explorar el régimen de correlación fuerte es muy reciente. Los primeros experimentos que muestran efectos de fuerte correlación en gases de átomos fríos son tan sólo de hace unos meses [15]. Estos experimentos inauguran un nuevo campo de investigación con miles de preguntas abiertas tanto en el terreno experimental como en el teórico. Lo que hace a este nuevo campo especialmente prometedor e interesante es sin duda la posibilidad de observar fenómenos físicos nuevos. Las fuertes correlaciones entre los átomos hacen que las propiedades del sistema (sus excitaciones, su respuesta a campos externos) sean radicalmente distintas a las que uno esperaría si las partículas actuaran independientemente. De este comportamiento “diferente” tenemos muchos ejemplos en otras ramas de la física. Por ejemplo, cuando los electrones de un sólido están fuertemente correlacionados el sistema exhibe un comportamiento que en nada se parece al de un mar de Fermi [16]. Bajo ciertas condiciones, los electrones pueden, por ejemplo, aparearse, dando lugar al fascinante fenómeno de la superconductividad [17]. Otro ejemplo inte-

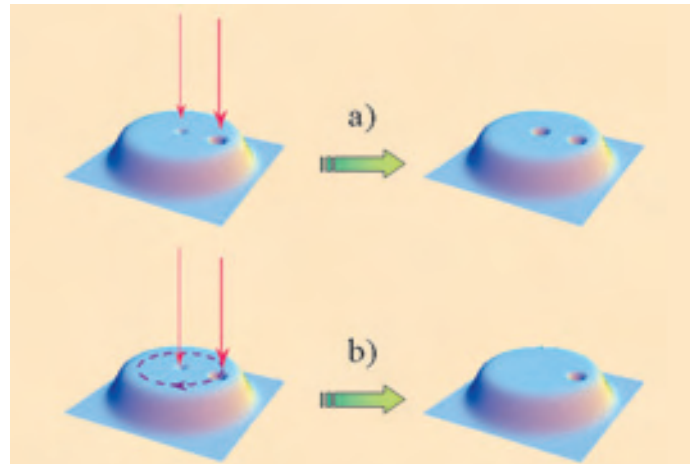


Figura 3. Esquema propuesto en [21] para la observación experimental de la estadística fraccionaria. 1) Se focaliza un láser en una determinada región de la trampa, y se aumenta su intensidad hasta que se crea un quasi-hueco. 2) A continuación se focaliza un segundo láser bien alejado del anterior. Para una cierta intensidad del segundo láser el estado del sistema es una superposición del estado con un quasihueco y el estado con dos quasihuecos. 3) Partiendo de esta superposición hacemos evolucionar al sistema de dos maneras distintas. En a) seguimos aumentando la intensidad del segundo láser, de modo que el estado final contiene dos quasihuecos. En b) movemos el primer láser muy lentamente, de tal modo que un quasi-hueco describe una curva cerrada alrededor del otro quasi-hueco. Debido a la estadística fraccionaria de los quasihuecos el estado que resulta de esta operación es diferente del inicial. Como consecuencia, si ahora seguimos aumentando la intensidad del segundo láser el estado final contiene un solo quasi-hueco, y no dos.

resante es el régimen de efecto Hall cuántico fraccionario [18], en el que los electrones viven en la interfase entre dos semiconductores y están sometidos a un campo magnético muy intenso. Las excitaciones de este sistema no tienen carga entera, sino que su carga es una fracción de la carga del electrón [19] (por ejemplo, $e/3$), a pesar de ser electrones enteros los que componen el sistema.

Los gases de átomos a muy baja temperatura pueden manipularse prácticamente a voluntad con campos electromagnéticos externos.

Fenómenos parecidos a estos que ocurren en materia condensada pueden observarse también con gases de átomos a muy bajas temperaturas. La gran ventaja que ofrecen estos sistemas atómicos es que pueden manipularse prácticamente a voluntad con campos electromagnéticos externos (láseres, campos magnéticos). Este poder de control hace que estos sistemas sean verdaderos laboratorios a escala mesoscópica en los que podemos diseñar experimentos nuevos, con nuevas aplicaciones y nueva física. Existen ya varias propuestas teóricas para la observación de efectos de fuerte correlación en gases atómicos [20-24]. A continuación analizaremos una de estas propuestas [21]. Se trata de una manera de crear un tipo de quasipartículas que ni son bosones ni son fermiones, sino *anyons*, esto es, partículas con estadística fraccionaria [25].

La existencia de objetos que no son bosones ni fermiones escapa a nuestra intuición, acostumbrada a manejar sistemas

de partículas independientes. Sabemos que los átomos se clasifican en bosones y fermiones. Los átomos bosónicos se componen de un número par de partículas elementales (electrones, neutrones y protones), mientras que para los átomos fermiónicos este número es impar. Los fermiones satisfacen el principio de exclusión de Pauli, mientras que los bosones no están sujetos a ninguna restricción. Más precisamente, si intercambiamos dos fermiones idénticos la función de onda adquiere una fase $e^{i\pi} = -1$, mientras que para dos bosones esta fase es $e^{i2\pi} = 1$. Así pues, la fase que resulta de intercambiar dos átomos idénticos sólo puede ser 1 o -1 ; es decir, no hay átomos para los que esta fase sea, por ejemplo, $e^{i\pi/2}$. Por supuesto, los bosones no pueden convertirse en fermiones o al revés (a menos que ionicemos los átomos). El comportamiento de un gas de átomos a baja temperatura viene dictado por su naturaleza bosónica o fermiónica. Si los átomos no interactúan (o si lo hacen muy débilmente) los fermiones tienden a ocupar estados distintos (del mismo modo que los electrones de un único átomo ocupan diferentes órbitas) formando un mar de Fermi, mientras que los bosones condensan en el mismo estado cuántico. Sin embargo, cuando la interacción entre los átomos es muy fuerte la “o bien bosón, o bien fermión” de la que hablábamos más arriba se altera profundamente. Por ejemplo, los bosones pueden cambiar sus propiedades y empezar a comportarse como si fueran fermiones, tratando de ocupar órbitas diferentes. Mas aún, bajo ciertas condiciones, las excitaciones de un gas de átomos bosónicos son objetos bien localizados espacialmente que no se comportan ni como bosones ni como fermiones. Sorprendentemente, cuando intercambiamos dos de estos objetos la fase que adquiere la función de onda no es ni 1 ni -1 , sino $e^{i\pi/2}$. A estas quasi-partículas se les llama *anyons* y se dice que tienen estadística fraccionaria.

Las fracciones artificiales de átomos, aniones, pueden moverse conservando su forma de modo que podemos considerarlas como entidades o cuasipartículas.

Todos estos efectos extraños podrían observarse en la siguiente situación experimental. Los átomos se confinan espacialmente usando campos electromagnéticos (producidos, por ejemplo, por un láser). La fuerza de confinamiento es muy intensa a lo largo de una dirección (z), de modo que los átomos sólo pueden moverse en el plano x - y . Al mismo tiempo, el sistema está rotando alrededor del eje z [Fig. 2(a)]. Pues bien, cuando el sistema se pone a girar muy rápidamente, el gas de átomos se configura en un estado fuertemente correlacionado muy parecido al que forman los electrones en el Efecto Hall cuántico fraccionario, el llamado líquido de Laughlin [26]. La rotación juega en el sistema atómico el mismo papel que el campo magnético en el sistema de electrones. En el estado de Laughlin el perfil de densidad es muy plano y extendido [Fig. 2(b)], indicando que los átomos se separan unos de otros tanto como pueden para evitar interactuar unos con otros. Este estado tiene una propiedad muy interesante [21]: la función de onda que lo describe se escribe (para átomos bosónicos) como producto de dos funciones de onda: una de ellas asegura que los átomos están organizados espacialmente de modo que no hay interacción entre ellos, mientras que la otra contiene los grados de libertad dinámicos del sistema. Esto quiere decir que

si aplicamos una fuerza al sistema, la primera función de onda no se altera, pues debe siempre garantizar la ausencia de interacciones, mientras que la segunda cambiará, respondiendo al campo externo. Así pues, si queremos describir el movimiento de los átomos basta con estudiar cómo evoluciona en el tiempo la segunda función de onda. Resulta, y este es el punto interesante, que ambas funciones de onda tienen carácter fermiónico; es decir, cuando intercambiamos dos átomos ambas adquieren una fase $e^{i\pi}$ (de modo que la fase total es $e^{i2\pi}$ como corresponde a una función que describe bosones). Como consecuencia, la parte relevante de la función de onda, la que dicta la dinámica de los átomos *bosónicos* es una función de onda que describe fermiones. En particular, uno puede determinar propiedades de este sistema de bosones como la densidad de estados, el calor específico, etc, y ver que los resultados se corresponden exactamente con los de un sistema de fermiones libres [21]. Si bien no podemos convertir bosones en fermiones, es posible, como vemos, hacer que los bosones se comporten de manera efectiva como si fueran fermiones.



Figura 4. Una pareja de haces láser se puede emplear para generar una onda estacionaria que confina a los átomos de un condensado. Cuando la intensidad del láser es grande, los átomos no pueden moverse y se forma un aislante.

Partiendo de este estado de Laughlin de densidad plana es posible crear *anyons* [21]. La idea es hacer “agujeros” en el perfil de densidad. Si focalizamos un cierto tipo de láser en una determinada región de la trampa que confina los átomos, el láser expulsará átomos fuera de esta región, de modo que se crea un hueco. Debido a las fuertes correlaciones entre los átomos el hueco creado tiene un área tal que, multiplicada por la densidad atómica nos da $1/2$. Dicho a grosso modo, tenemos un hueco de *medio átomo*. Estas fracciones artificiales de átomo pueden moverse conservando su forma, de modo que podemos considerarlas como entidades o cuasipartículas. Por ejemplo, si movemos muy lentamente el láser que crea el hueco, este seguirá la trayectoria del láser. En principio es posible crear dos de estos huecos en posiciones distintas y moverlos de modo que sus posiciones se intercambien. Si lo hacemos, obtendremos que la función de onda adquiere una fase $e^{i\pi/2}$. Es decir, estas *mitades* de átomo no son ni fermiones ni bosones, sino *anyons* con una fase estadística a mitad de camino entre fermiones y bosones. Esta fase estadística fraccionaria podría ser detectada directamente realizando este tipo de experimentos con átomos fuertemente correlacionados [Figura 2]. Es interesante notar que si bien existe evidencia indirecta de la existencia de *anyons* en otros sistemas (electrones en el efecto Hall cuántico) [25], la estadística fraccionaria no ha sido nunca medida directamente.

Existen otras situaciones en las que es posible observar efectos de fuerte correlación con gases atómicos. Por ejemplo, los átomos se pueden almacenar en una “red óptica”. La idea consiste en utilizar pares de haces láser enfrentados

entre sí, para generar ondas estacionarias [Figura 4]. Los átomos neutros se sienten atraídos hacia los mínimos de intensidad de dichas ondas y sienten un potencial similar al que los electrones experimentan cuando se mueven en un sólido. La ventaja de estos sistemas atómicos es que en la red óptica, al contrario que en un dispositivo de estado sólido, tanto el periodo como la intensidad del potencial pueden modificarse a voluntad, o incluso pueden crearse potenciales más sofisticados (redes hexagonales, potenciales aleatorios, defectos).

Manipulando la red óptica se puede alterar el estado de los átomos. En general éstos pueden saltar de un pozo del potencial al pozo vecino, atravesando las barreras de potencial por efecto túnel. Variando la intensidad de los láseres que crean el potencial es posible controlar la altura de las barreras, y por tanto, la probabilidad de túnel. Cuando la amplitud de túnel es muy grande los átomos se encuentran completamente deslocalizados por toda la red. En este límite, las interacciones entre los átomos no juegan ningún papel y éstos se comportan como partículas independientes. Todos ellos están descritos por una misma onda plana 1, formando un superfluido. Sin embargo, en el límite contrario de amplitud de túnel muy pequeña, las interacciones entre los átomos dominan la física del problema. Para minimizar la fuerte repulsión los átomos tratan de evitarse unos a otros. Cada átomo se “aisla” de los demás en un pozo distinto de la red, y no es posible encontrar más de un átomo en el mismo pozo. Esta transición de fase de un estado superfluido a un estado aislante, predicha en [20], ha sido observada recientemente en un experimento espectacular con átomos en una red óptica [15].

Los efectos de fuerte correlación se hacen aún más ricos cuando los átomos en la red tienen grados de libertad internos (niveles hiperfinos, por ejemplo). Si la repulsión entre los átomos es muy fuerte, éstos pueden además evitarse unos a otros cambiando su estado interno. Bajo las condiciones apropiadas los átomos pueden, por ejemplo, organizarse formando pares de Cooper [22], de forma parecida a los electrones en un superconductor. Este es otro ejemplo de cómo, cuando las interacciones son muy fuertes, átomos bosónicos pueden comportarse como fermiones. Aunque esta vez como fermiones interaccionantes.

En conclusión, con sistemas de átomos fuertemente correlacionados pueden llevarse a cabo experimentos de carácter fundamental que son de interés general en diferentes ramas de la física. Estos experimentos son limpios y fácilmente controlables, y la teoría microscópica detrás de ellos puede deducirse sistemáticamente a partir de primeros principios. De hecho, gracias a que se conoce bien la dinámica de estos sistemas, las redes ópticas de bosones (y de fermiones en un futuro próximo) constituyen un ejemplo del simulador cuántico propuesto por Feynmann [27]:

Manipulando las propiedades del sistema, podemos hacer que los átomos simulen otros modelos físicos (por ejemplo electrones en un sólido), demasiado complicados para ser estudiados analítica y numéricamente.

Bibliografía

- [1] A. EINSTEIN, Sitz. Preuss. Akad. Wiss. **1925**, 3 (1925).
- [2] Ver, por ejemplo, K. HUANG, *Statistical Mechanics*, Segunda Edición, (John Wiley & Sons, New York, 1987).
- [3] A. GRIFFIN, D. W. SNOKE, S. STRINGARI, Eds., *Bose-Einstein Condensation* (Cambridge Univ. Press., 1995).
- [4] M. H. ANDERSON, J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN, Y E. A. CORNELL, *Science* **269**, 198 (1995); C. C. BRADLEY, C. A. SACKETT, J. J. TOLLETT, and R. G. HULET, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995); K. B. DAVIS, M.-O. MEWES, M. R. ANDREWS, N. J. VAN DRUTEN, D. S. DURFEE, D. M. KURN, AND W. KETTERLE, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [5] Para una lista de publicaciones, experimentos y enlaces a otras páginas, ver *BEC HomePage*, <http://amo.phy.gasou.edu/bec.html>.
- [6] D. S. JIN y col., *Phys. Rev. Lett.* **77**, 420 (1996); M.-O. MEWES y col., *Phys. Rev. Lett.* **77**, 988 (1996); C. C. BRADLEY y col., *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).}
- [7] S. STRINGARI, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2360 (1996); VÍCTOR M. PÉREZ-GARCÍA, H. MICHINEL, J. I. CIRAC, M. LEWENSTEIN, P. ZOLLER, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5320 (1996).
- [8] K. W. MADISON, F. CHEVY, W. WOHLLEBEN, J. DALIBARD, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 806 (2000); J.R. ABO-SHAER, C. RAMAN, J.M. VOGELS, *Science* **292**, 476 (2001); P. C. HALJAN, I. CODDINGTON, P. ENGELS, E. A. CORNELL, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 210403 (2001).
- [9] K. W. MADISON, F. CHEVY, W. WOHLLEBEN, J. DALIBARD, arXiv: cond-mat/0004037.
- [10] M.-O. MEWES, et al., *Phys. Rev. Lett.* **78**, 582 (1997); M. HOLLAND, K. BURNETT, C. GARDINER, J. I. CIRAC, P. ZOLLER, *Phys. Rev. A* **54**, R1757 (1995).
- [11] M.R. ANDREWS, C.G. TOWNSEND, H.-J. MIESNER, D.S. DURFEE, D.M. KURN, AND W. KETTERLE, *Science* **275**, 637 (1997).
- [12] A. SØRENSEN, L.-M. DUAN, J. I. CIRAC, P. ZOLLER, *Nature* **409**, 63 (2001).
- [13] A. EINSTEIN, B. PODOLSKY, N. ROSEN, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [14] W. M. ITANO y col., *Phys. Rev. A* **47**, 3554 (1993).
- [15] M. GREINER, O. MANDEL, T. ESSLINGER, T. W. HÄNSCH, I. BLOCH, *Nature* **415**, 39 (2002).
- [16] Ver, por ejemplo, P. Fulde in *Electron correlations in molecules and solids*, (Springer, Berlin, 1995).
- [17] Ver, por ejemplo, J. R. SCHRIEffer in *Theory of superconductivity*.
- [18] Ver, por ejemplo, T. CHAKRABORTY AND P. PIETILÄINEN in *The Quantum Hall Effects: Fractional and Integral* (Springer-Verlag, Berlin, 1995); A. H. MacDonald, cond-mat/9410047.
- [19] R. DE-PICCIOTTO, M. HEIBLUM, V. UMANSKY, G. BUNIN, D. MAHALU, *Nature* **389**, 162 (1997).
- [20] D. JAKSCH, C. BRUDER, J. I. CIRAC, C. W. GARDINER, P. ZOLLER, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3108 (1998).
- [21] B. PAREDES, P. FEDICHEV, J. I. CIRAC, P. ZOLLER, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 10402 (2001); B. PAREDES, P. ZOLLER, J. I. CIRAC, *Phys. Rev. A* **66**, 033609 (2002).
- [22] B. PAREDES, J. I. CIRAC, arXiv:cond-mat/0207040.
- [23] W. HOFSTETTER, J.I. CIRAC, P. ZOLLER, E. DEMLER, M.D. LUKIN, arXiv:cond-mat/0204237.
- [24] A. RECATI, P. FEDICHEV, W. ZWERGER, P. ZOLLER, arXiv:cond-mat/0206424.
- [25] S. M. GIRVIN, *Nature*, ; D. AROVAS, J. R. SCHRIEffer, F. WILCZEK, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 722 (1984).
- [26] R. B. LAUGHLIN, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395 (1983).
- [27] R.P. FEYNMAN, *Int. J. Theor. Phys.*, Vol. **21**, pp. 467-488 (1982); R.P. Feynmann, *Found. Phys.*, Vol. 16, pp.507-531 (1986).

J.J. García-Ripoll, B. Paredes, J.I. Cirac
están en el Instituto Max Planck de Óptica Cuántica. Alemania