Física no lineal: Caos y Solitones

Fernando Falo, Ricardo Chacón y Luis Mario Floría

La Física no lineal ha afrontado, en los últimos 50 años, el estudio de fenómenos en todas las escalas de longitud. En sistemas con pocos grados de libertad, donde se esperarían movimientos regulares, el fenómeno del "caos determinista" abrió una nueva frontera en nuestra comprensión del mundo. En el límite opuesto (muchas partículas o límite termodinámico) donde un comportamiento "ruidoso" o "estocástico" que lleve al equilibrio sería lo previsible, la no linealidad produce sorprendentes estructuras coherentes (solitones y breathers). En este breve artículo tratamos estos dos extremos.

I. Solitones

En 1954, la aparición de los ordenadores digitales permitió las primeras simulaciones numéricas de sistemas dinámicos. Aunque concebidos para cálculos que permitieran un eficaz diseño de armas nucleares, las posibilidades de su uso en física básica fueron rápidamente intuidas por mentes tan preclaras y eficaces como J. von Newmann y S. Ulam. En su célebre artículo "Studies of non-linear problems", E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam y M. Tsingou [1], en el Laboratorio Nacional de Los Alamos realizaron la primera simulación de un problema que enraiza en los fundamentos de la mecánica estadística: el problema de la equipartición de la energía en un modelo clásico no lineal (lo que se ha llamado el problema FPU). Consideraron una cadena de partículas unidas con muelles no armónicos con la esperanza de observar cómo la energía concentrada inicialmente en un modo se repartía entre los demás modos lineales. El modelo que plantearon corresponde a las ecuaciones:

Formación de un soliton debido al movimiento de una barca en un canal de Escocia.

$$\ddot{x}_i = x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i + \alpha\left[(x_{i+1} - x_i)^n + (x_i - x_{i-1})^n\right] \quad (1)$$

donde n=3 o 4. Sorprendentemente: "*los resultados muestran muy poca, o nula, tendencia hacia la equipartición de la energía entre los grados de libertad*". A tiempos cortos de simulación la tendencia aparente es a la equipartición, pero a tiempos largos se encuentra que la energía se vuelve a concentrar en el modo inicial (como cita Alwyn Scott, este resultado fue producto de una casualidad). La introducción de los términos no lineales (cúbicos y cuadráticos) no supone, por lo tanto, una simple perturbación del sistema lineal sino que cambia completamente la física del problema.

Una forma típica de razonar en física es tratar con "excitaciones", es decir, soluciones del problema que tienen una energía superior al estado fundamental de energía más baja. Así, en la aproximación lineal surgen los llamados "fonones", "magnones", "plasmones", etc... Estas excitaciones son de tipo "oscilador armónico" ¿Qué excitaciones son las relevantes en la física no lineal? ¿Qué tienen que ver con las recurrencias en la energía encontradas en el problema FPU?. En los años 60 aparece una respuesta a estos problemas. N. Zabusky y M. Kruskal aproximaron el problema FPU por la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) que modela el comportamiento de una superficie de fluido. Las soluciones de esta ecuación son interesantes. Son ondas solitarias que se pueden atravesar unas a otras sin cambio ni en su forma ni en su velocidad, es decir, se comportan como partículas. Las denominaron "solitones". Una característica de estas excitaciones es la localización de la energía en una región finita del espacio. Su relación con el problema FPU se entiende al ser éstas las excitaciones relevantes en el sistema nolineal que estudiaron. Con la energía inicial se forman solitones que colisionan entre sí sin perder la forma y al cabo de un cierto tiempo se recupera la situación de partida [2].

No sólo las ecuaciones del problema FPU o la ecuación KdV soportan soluciones localizadas de este tipo. Para estudiar la física de estas excitaciones, es importante conocer cuál es el origen de la localización de la energía. Para ello tomaremos ahora como ejemplo otro sistema que ha llegado a ser uno de los paradigmas centrales de la no linealidad: la ecuación de sine-Gordon (sG).

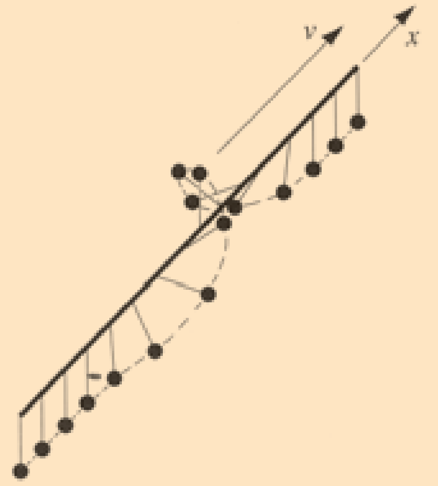

Figura 1. Representación esquemática de un solitón en un conjunto de péndulos acoplados.

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} = \sin(\varphi) \quad (2)$$

Para visualizar esta ecuación consideremos un sistema real que aproximadamente responde a esta ecuación. Sea un conjunto de péndulos acoplados mediante muelles de torsión (ver figura). La situación de energía mínima es la de todos los péndulos abajo y los muelles sin estirar. Realizamos ahora una deformación de torsión de una vuelta completa entre el primero y el último de los péndulos. Si los muelles son muy "duros", esta torsión se repartirá uniformemente entre los péndulos (a costa de un incremento de la energía potencial gravitatoria). Sin embargo, si domina la energía gravitatoria la deformación tenderá a concentrarse en unos pocos péndulos. Esta competencia entre escalas de energía está en el origen de estas formaciones coherentes.

¿Donde encontramos solitones? En cualquier sistema no lineal con competencia de interacciones. El modelo discreto planteado en el párrafo anterior es la versión discreta de la ecuación de sG o modelo de Frenkel-Kontorova. Este modelo apareció por vez primera en el estudio del movimiento y estructura de dislocaciones en sólidos sometidos a deformaciones plásticas. En este caso la variable corresponde a la posición relativa del átomo respecto a la situación de equilibrio de la estructura ordenada. Pero φ también puede ser el ángulo de la imanación respecto al estado ordenado en un material magnético. En este caso el solitón corresponde a lo que se llama pared de dominio ("domain wall") magnético.

Veamos un sistema físico que ha motivado el estudio exhaustivo de la ecuación de sG, tanto en su versión continua como discreta. Tomemos dos piezas de superconductor (que conduce corriente sin disipación) y pongámoslas separadas por una fina capa de aislante o conductor normal. Si esta capa es suficientemente delgada los pares de Cooper superconductores pueden atravesarla mediante efecto túnel cuántico. Este dispositivo es lo que se denomina unión Josephson. Si ahora aplicamos un campo magnético paralelo a la unión , éste puede penetrar en la unión, pero en cantidades discretas bien definidas, que se llaman "cuantos de flujo" o "fluxones". Pues bien, es fácil ver que la ecuación que describe la física de la unión Josephson es la ecuación de sG y un fluxón es un solitón. Gran parte de los resultados más interesantes sobre solitones sG se puede encontrar en los libros sobre uniones Josephson.

No podemos dejar de citar otra ecuación que está concentrando desde hace algún tiempo una gran atención. La llamada ecuación de Schrödinger no lineal (NLSE), especialmente como modelo de medios ópticos no lineales. Las soluciones solitónicas que soporta tienen un gran atractivo por tratarse de excitaciones que se propagan en un medio dispersivo sin necesidad de amplificación. Muy recientemente se está usando la NLSE, (tanto en su versión continua como en sus múltiples formas discretas) para estudiar algunas propiedades de los condensados de Bose-Einstein (véanse los trabajos recientes de Víctor Pérez y colaboradores, de la Universidad de Castilla La Mancha).

En España, y dentro del dominio de la Física, los estudios de ecuaciones continuas de tipo sG y NLSE comenzaron en los años 80 por parte (entre otros, como M.G. Velarde) de L. Vázquez y colaboradores (muchos de ellos de origen soviético) que introdujeron potentes métodos numéricos para la resolución de las ecuaciones discretizadas. La colaboración de varios investigadores españoles (L. Vázquez, A. Sánchez, y dos de los autores, F. Falo y L.M. Floría) con el Center for Nonlinear Studies del laboratorio de Los Alamos (en particular con Alan Bishop, actual Director de la División Teórica) supuso un fuerte impulso a este campo de investigación. A. Sánchez (Universidad Carlos III de Madrid) y colaboradores han realizado una extensa labor en la simulación de excitaciones no lineales en el modelo continuo de sG disipativo y forzado, pudiendo interpretar los resultados en muchos casos en términos de "coordenadas colectivas"[3]. Estos métodos utilizan la identificación de un solitón con una "partícula" y permiten encontrar ecuaciones efectivas para el movimiento de la misma. Esta aproximación ha sido muy fructífera y nos permite extender algunos resultados de los modelos continuos a modelos discretos ya que el efecto de discretitud aparece como una perturbación.

El comportamiento de los solitones como partículas los hace especialmente idóneos para la transmisión de datos o información sin necesidad de realimentación. La investigación de las técnicas de producción de solitones en fibras ópticas constituye una importante línea de trabajo en la que podemos citar al Instituto de Física de Cantabria (L. Pesquera), la Universidad Politécnica de Catalunya (R. Vilaseca) el Instituto de Óptica (J.M. Soto-Crespo) y la Universidad de Baleares (C. Mirasso y M. San Miguel).

II. Modos intrínsecos localizados o "breathers" discretos

En algunos modelos continuos como el de sG o NLSE hay otro tipo de soluciones más sutiles que corresponden a excitaciones de gran amplitud (fuera del régimen lineal) y que conservan la condición de localidad. Estas soluciones llamadas "breathers" (modos "respiratorios") pueden verse, en el modelo sG, como un estado ligado solitón- antisolitón, y su existencia está estrechamente vinculada con la "integrabilidad" del modelo continuo. Sin embargo, en los comienzos de los años 90, tras los resultados numéricos de A. Sievers y S. Takeno, la prueba matemática de S. Aubry (CEA, Saclay) y R.S. MacKay (Universidad de Warwick) mostró que este tipo de excitaciones (que llamaremos modos intrínsecos localizados MIL), son soluciones genéricas de toda red discreta no lineal [4]. Para ello adoptaron un punto de vista contrario al que se planteaba en los modelos continuos. Consideremos un conjunto de osciladores (no lineales, por supuesto) desacoplados; ahora pongamos uno de ellos a oscilar con gran amplitud. Tenemos, de manera obvia, una localización en la energía en el oscilador anterior, ya que sin acoplamiento de la energía no puede extenderse. La principal contribución de Aubry y MacKay fue demostrar que, bajo condiciones muy poco restrictivas, al acoplar débilmente los osciladores, la localización persiste. Este resultado se ha corroborado y extendido mediante cálculo numérico. Hay que resaltar que esta localización no es consecuencia del desorden ("localización de Anderson"), ya que las redes que tratamos son regulares, sino que es el resultado de la combinación de dos ingredientes básicos: la nolinealidad y la discretitud de la red.

El estudio de nuevas propiedades de los MIL así como la obtención de métodos numéricos precisos ha disparado una línea de investigación internacional en la que están participando varios grupos de investigación en España. La investigación se ha articulado a través de la red europea LOCNET (http://www.maths.warwick.ac.uk/mackay/locnet.html). Después de una época en la que se han fundamentado las propiedades de los MIL y desarrollado métodos numéricos precisos (cabe destacar aquí el trabajo de J.L. Marín, de la Universidad de Zaragoza, con S. Aubry), los esfuerzos se están concentrando en los últimos tiempos en aplicar los resultados a sistemas físicos reales. Un resultado importante, impulsado por las predicciones teóricas del grupo de los autores de la Universidad de Zaragoza, fue el diseño de redes discretas de uniones Josephson y la consiguiente detección experimental de MIL, simultáneamente, por los grupos del profesor A. Ustinov (Universidad de Erlangen) y del profesor T.P. Orlando (MIT), con la participación de J.J. Mazo (Universidad de Zaragoza). En dos interesantes (y difíciles) experimentos [5], los dos grupos consiguieron excitar y mantener la rotación de algunas uniones de la red (es decir, en un estado resistivo), mientras el resto permanecía en el estado superconductor, poniendo así sobre base experimental firme la existencia de MIL. Estos resultados (y otros en uniones Josephson extensas) permiten afirmar que las ideas de no-linealidad, discretitud o disipación encuentran su banco de pruebas natural en estos dispositivos superconductores.

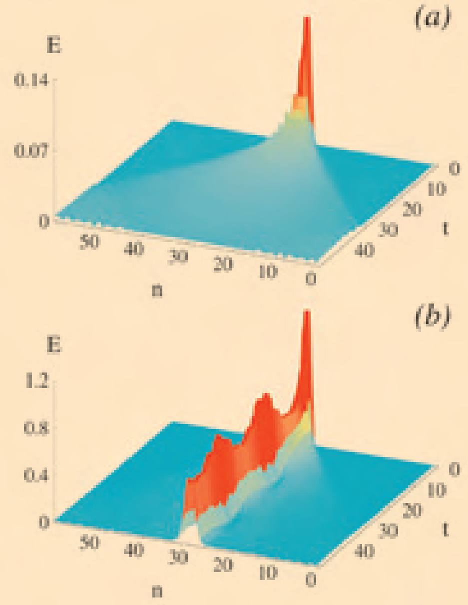

Figura 2. Perfil de la localización de energía en una red discreta y no lineal. La figura (a) muestra una excitación de amplitud pequeña que se distribuye. Si la amplitud es mayor (notar la diferencia de escalas) la energía queda localizada.

Otro posible campo de aplicación del concepto de MIL está en la biofísica. S. Aubry y G. Tsironis (Universidad de Heraklion) han sugerido que los MIL podrían estar en el origen del transporte de energía en biomoléculas. Para ello es necesario el estudio de las condiciones, no sólo de existencia, sino también de movilidad de estas excitaciones. Así como hay resultados generales para la formación de breathers, no ocurre lo mismo con las condiciones de movilidad. Utilizando modelos sencillos de polímeros M. Ibañes, J.M. Sancho (Universidad de Barcelona) y G. Tsironis, han mostrado la propagación de MIL en geometrías compatibles con la estructura de macromoléculas. Resultados similares han sido también obtenidos por el grupo de J.F.R. Archilla (Universidad de Sevilla). Sin embargo, el papel que juegan las excitaciones no lineales (solitones y breathers) en la física de las biomoléculas (proteínas y ácidos nucleicos) es todavía materia de controversia científica y requiere un mayor trabajo teórico y experimental.

El futuro del estudio de las excitaciones no lineales se concentra en dos aspectos. El primero, encontrar los procesos en los que la localización y transporte no lineales sean ingredientes esenciales de la física. Y en segundo lugar, llevar estos conceptos con el adecuado rigor al límite cuántico. En este aspecto, de nuevo, la experimentación con el efecto Josephson puede resultar de una importancia decisiva.

III. Caos y su control

Entre los modos de comportamiento que emergen de la nolinealidad de los sistemas, el que con más intensidad ha cautivado, hasta el grado de formar ya parte de la cultura científica popular, es sin duda el comportamiento caótico. La comprensión y caracterización del caos como fenómeno genérico en los sistemas no lineales de pocos grados de libertad han estimulado (y en sentido inverso, se han beneficiado de) desarrollos en áreas fundamentales de la Matemática. Aunque ciertamente sucede lo mismo con todos los paradigmas de la nolinealidad, aquí se da con mucha mayor claridad, de modo que el emplazamiento de los muchos trabajos de investigación sobre el caos realizados en nuestro país dentro de la Matemática o de la Física resulta, en la inmensa mayoría de los casos, bastante arbitrario, lo que nos exime del difícil compromiso de seleccionar citaciones de trabajos (ciertamente relevantes, algunos de ellos) en este campo.

Una clara excepción a esa indeterminación es el llamado "caos cuántico", es decir, la cuestión de las manifestaciones cuánticas de la fenomenología caótica de los sistemas de la mecánica clásica, y por ello es obligado citar aquí los abundantes trabajos de F. Borondo (Universidad Autónoma de Madrid) y colaboradores, sobre comportamiento caótico en modelos clásicos de ciertas moléculas y su relación con las propiedades de los modelos cuánticos correspondientes. Otras líneas de investigación física en caos, claramente conectadas al desarrollo de inestabilidades hidrodinámicas y la formación de patrones en sistemas extensos, se tratan en otras páginas de este monográfico.

La profundización en la comprensión del caos en sistemas de complejidad creciente ha estado a menudo ligada en los últimos años al interés por controlar tal comportamiento [11,12]. Entre las razones principales de este interés mencionaremos el carácter *interdisciplinar* del problema, la promesa implícita de una mejor comprensión del comportamiento caótico (en particular, del umbral orden-caos) y la posibilidad de aplicaciones prácticas en diversas áreas científicas y tecnológicas, tales como los láseres, los sistemas eléctricos de potencia, la mecánica de fluidos, la fisiología, la ingeniería química, la tecnología de comunicaciones, las neurociencias y la tecnología de superconductores, entre otras.

Tomaremos aquí el sentido más amplio de control de caos: un procedimiento para aumentar o suprimir el comportamiento caótico, dependiendo de las necesidades o intereses. Los métodos de control de caos pueden clasificarse *grosso modo* en dos tipos [6]: de lazo abierto y de lazo cerrado. Los métodos de lazo cerrado inhiben la dinámica caótica estabilizando una de las órbitas periódicas inestables –asociadas al atractor caótico bajo consideración– mediante la aplicación de variaciones temporales de *pequeña* amplitud de un parámetro del sistema. Estos métodos presentan dos atractivos fundamentales.

Su aplicabilidad *a priori* a un amplio espectro de sistemas dinámicos, ya que se basan en propiedades genéricas de la dinámica caótica, y la posibilidad de obtener una gran diversidad de comportamientos controlados, ya que los sistemas caóticos presentan un número infinito de órbitas periódicas inestables. En cuanto a las limitaciones, los métodos de lazo cerrado exigen la detección del grado de desviación de la órbita periódica inestable seleccionada en tiempo real, lo que implica que el dispositivo experimental de control sea generalmente un sistema de lazo cerrado, el cual tiende a ser relativamente complicado. Otras limitaciones se encuentran en la incapacidad de estos procedimientos para controlar tanto sistemas dinámicos de respuesta rápida (v.g., cadenas de uniones Josephson o sistemas electro-ópticos rápidos) como sistemas caóticos sometidos a ruido intenso.

Los métodos de lazo abierto suprimen o intensifican el comportamiento caótico añadiendo un forzamiento temporal (o perturbando un parámetro del sistema) de amplitud (máxima) preferiblemente pequeña. En la mayoría de las ocasiones se usan perturbaciones periódicas (generalmente armónicas) como excitaciones de control, aunque también se han usado excitaciones quasiperiódicas [9], así como distintos tipos de ruido y de excitaciones caóticas. En contraste con los métodos de lazo cerrado, tales excitaciones de control son independientes del estado caótico del sistema. Esta característica distintiva presenta ventajas e inconvenientes. De un lado, el dispositivo experimental de control suele ser un sistema sencillo y rápido de lazo abierto que no necesita monitorización *on-line* ni procesamiento de datos, lo que los hace atractivos por su sencilla aplicación a situaciones experimentales y a sistemas altamente complejos donde es difícil encontrar un parámetro de control accesible (como en muchos sistemas químicos y biológicos [7]), así como por su robustez frente al ruido. Por otro lado, la principal crítica a tales métodos se centra en la dificultad de predecir la naturaleza del estado controlado no caótico, así como las regiones del espacio de parámetros de la excitación de control donde ésta es efectiva. Este es, sin lugar a dudas, el caso de sistemas dinámicos con muchos grados de libertad, como ciertos modelos de láseres y muchos modelos de redes neuronales, donde la ausencia de una aproximación teórica de control se traduce en la aplicación *tentativa* de excitaciones de control. Sin embargo, se está desarrollando una cierta teoría de control para una clase importante de sistemas dinámicos disipativos no autónomos [8] que incluye el péndulo perturbado entre otros modelos universales. Esta teoría proporciona estimaciones analíticas de los intervalos de los parámetros de la excitación de control para suprimir/intensificar el estado caótico inicial, además de proporcionar información clave sobre la naturaleza de la respuesta regularizada (en particular, sobre su periodicidad) en el caso de supresión de caos. Existen pocos resultados teóricos generales en el método de control de caos por excitaciones periódicas débiles: la inmensa mayoría son estudios numéricos y, en mucho menor grado, experimentales. Un excepción se da en la siguiente familia de sistemas dinámicos disipativos no autónomos:

$$\ddot{x}+\frac{dU(x)}{dx}=-d(x,\ddot{x})+p_1(x,\dot{x})\,F_{\text{caos}}(t)+p_2(x,\dot{x})\,F_{\text{control}}(t), \qquad (3)$$

donde $U(x)$ es un potencial nolineal, $-d(x,\dot{x})$ es una fuerza disipativa general (pudiendo incluir un término de fuerza constante), $p_1(x,\dot{x})\ F_{\text{caos}}\}(t)$ es una excitación general inductora de caos, y $p_2(x,\dot{x})\ F_{\text{control}}(t)$ es una excitación general de control de caos que debe determinarse para cada elección de los restantes parámetros del sistema. Además, $F_{\text{caos}}(t)$, $F_{\text{control}}(t)$ son funciones armónicas con fases iniciales $0,\Phi$ y frecuencias ω, Ω, respectivamente. La teoría de control de caos desarrollada para la familia (1) (que incluye el péndulo y los osciladores de Duffing con uno y dos pozos, entre otros modelos ubicuos) [8] se basa en la aplicación del método de Melnikov [10], lo que exige que los términos de disipación y excitación sean débiles perturbaciones del sistema conservativo subyacente, $\ddot{x}+dU(x)/dx=0$, el cual presenta una separatriz. Consideremos, a modo de ejemplo, la siguiente ecuación de Duffing en la que la excitación de control es paramétrica:

$$\ddot{x}-x+\beta x^3=-\delta\dot{x}+\gamma\cos(\omega t)-\eta(\Omega t+\Phi). \qquad (3)$$

Para $\beta = 4$, $\delta = 0.154$, $\gamma = 0.095$, $\omega = 1.1$ y $\eta = 0$, el sistema exhibe un atractor extraño caótico caracterizado por un exponente de Lyapunov maximal de valor $\lambda^+ (\eta = 0) \cong 0.127$ bits/s. Para el caso de la resonancia principal $\Omega = \omega$, la aproximación teórica predice una intensificación (supresión) del comportamiento caótico para valores de la fase inicial de la excitación de control en torno a $\pi/2$ y $3\pi/2$ (0 y π), lo que concuerda con los resultados numéricos (relativos al exponente de Lyapunov maximal) que se muestran en la Fig. 3. Además, la teoría proporciona las regiones donde se suprimen incluso los *transitorios* caóticos (áreas delimitadas por las curvas cerradas en la Fig. 3).

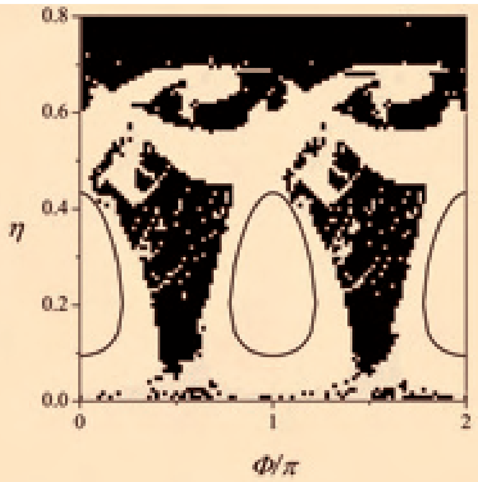

Figura 3. Retículo de 100 × 100 puntos en el plano de parámetros $\Phi-\eta$ para el oscilador de Duffing (2). Las regiones en negro y gris indican que el correspondiente exponente de Lyapunov maximal es mayor que $\lambda^+(\eta\neq 0)$=0.127 y 10^{-3}, respectivamente.

La teoría de control de caos mencionada se puede aplicar a diversos fenómenos caóticos en ecuaciones de evolución más complejas que (3), siempre que sea posible deducir una ecuación *efectiva* que pertenezca a la familia (3) para los mismos. Tal es el caso del control de transporte caótico en "ratchets" deterministas, el control de solitones caóticos en cadenas de Frenkel-Kontorova y el control de caos espacio-temporal en la ecuación sG perturbada.

Referencias

[1] E. FERMI, J. PASTA, S. ULAM, M. TSINGOU. "Studies of nonlinear problems". Los Alamos report LA-1940 (1955).

[2] ALWYN SCOTT, "Nonlinear Science.Emergence and Dynamics of Coherent Structures" (Oxford University Press) 1999.

[3] A. SÁNCHEZ, A.R. BISHOP "Collective coordinates and length-scale competition in spatially inhomogeneous soliton-bearing solutions", SIAM *Rev.* 40, 579-615 (1998).

[4] L.M. FLORÍA, J.L. MARÍN , J.J. MAZO "Física de los modos discretos". Investigación y Ciencia, Junio 2002.

[5] E. TRÍAS, J.J. MAZO AND T.P. ORLANDO, "Discrete breathers in nonlinear lattices: Experimental detection in a Josephson-junction array". *Phys. Rev. Lett.* **84**, 741-744 (2000). P. BINDER *et al*., "Observation of breathers in Josephson Ladders" *Phys. Rev. Lett.* **84**, 745 (2000).

[6] G. CHEN Y X. DONG, *From Chaos to Order*, World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, Vol. **24** (World Scientific, Singapore, 1998).

[7] M. A. MATÍAS Y J. GÜÉMEZ, "Stabilization of chaos by proportional pulses in the system variables", *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1455-1462 (1994).

[8] R. CHACÓN, *Control of Homoclinic Chaos by Weak Periodic Perturbations*, World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A (en prensa).

[9] R. VILASECA, A. KUL'MINSKII Y R. CORBALÁN, "Tracking unstable steady states by large periodic modulation of a control parameter in a nonlinear system", *Phys. Rev.* E **54** (1), 82-85 (1996).

[10] J. GUCKENHEIMER Y P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer-Verlag, New York, 1983).

[11] MARÍN, J. Y SOLÉ, R. V. "Controlling chaos in unidimensional maps using macroevolutionary algorithms", *Phys. Rev.* E **65** (2), 026207 (2002).

[12] CARTWRIGHT, J. H., MAGNASCO, M. O. Y PIRO, O. "Bailout embeddings, targeting of invariant tori, and the control of Hamiltonian chaos", *Phys. Rev.* E **65** (4), 045203 (2002).

Fernando Falo, Luis Mario Floría
están en el Dpto. de Física de la Materia Condensada y Dpto. de Teoría Simulacion de Sistemas Complejos. ICMA. CSIC- Univ. de Zaragoza y BIFI
Ricardo Chacón
está en el Dpto. de Electrónica e Ingeniería Electromecánica. Univ. de Extremadura