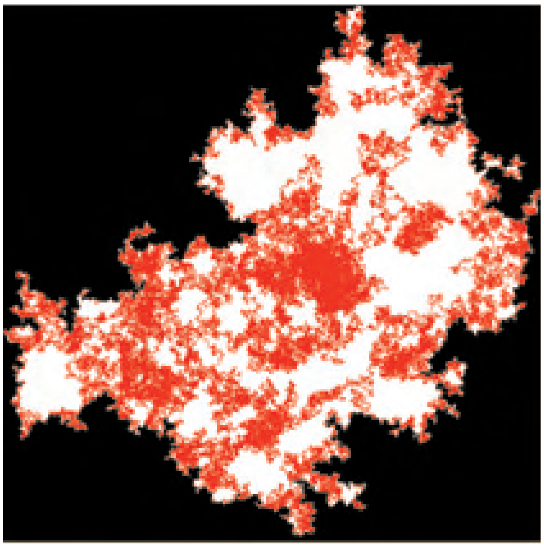
La ubicuidad como futuro de la Física Estadística y No Lineal

F. Guinea, E. Louis, y M. San Miguel

Los físicos tiene una amplia tradición en investigar en otras disciplinas, por su experiencia en el desarrollo de modelos matemáticos para sistemas complejos. Parte de esta historia, y su proyección futura, se comentan en este artículo.

En una de las numerosas entrevistas que el Prof. John Bardeen concedió a lo largo de su carrera, alguien le pidió que comentara las principales dificultades que había encontrado en su trabajo. Bardeen, después de reflexionar unos instantes, contestó: "...cuando empecé a trabajar en las propiedades de los metales me encontré con que la densidad de portadores era del orden 10^{28} electrones/cm^3, poco después, al iniciar mis trabajos sobre semiconductores, tuve que enfrentarme a las también muy altas densidades de excitones, finalmente al trabajar en superconductividad de nuevo la densidad de las partículas relevantes, los pares de Cooper, era enormemente grande". Con este aparentemente inocente comentario, Bardeen estaba poniendo el dedo en la llaga: la necesidad de utilizar la imaginación (modelizar) y la Física Estadística para tratar problemas de muchas partículas que además pueden interaccionar entre sí. Los avances que la Física Estadística ha experimentado a lo largo de los años han ocurrido, en la mayoría de los casos, de la mano de las disciplinas que se ocupan de los sistemas condensados. Sin embargo, hoy día, su enorme potencial, unido a los grandes avances en la teoría de los sistemas dinámicos y la Física No Lineal en general, ha dado lugar a una importante diversificación de su campo de acción en áreas tales como la Economía y las Ciencias Sociales en general, la Biología y la Biofísica, la Medicina, Ciencias de la Computación, etc. Pretendemos en este artículo repasar algunos de los ingredientes conceptuales principales que han permitido esa presencia ubicua de la Física Estadística y No Lineal, así como señalar algunos de los temas que se abren en esos nuevos campos.



Simulación numérica del movimiento Browniano

1. Sistemas estocásticos y caos

En el primer capítulo del libro de Gardiner "Handbook of stochastic methods" [1], el autor discute con cierto detalle los dos enfoques históricos al problema del movimiento Browniano: el elegante tratamiento de Einstein y la ecuación de Langevin. Einstein, en 1905 publicó sus tres famosos trabajos sobre el efecto fotoeléctrico, la relatividad restringida y el movimiento Browniano. Este último es quizás su trabajo más citado, y Gardiner subraya que buena parte de los conceptos de la moderna Física Estadística están basados en él [2, 3]. Las dos hipótesis fundamentales del trabajo de Einstein son: a) El movimiento de las partículas en suspensión (granos de polen en el trabajo original de Brown) está originado por los sumamente frecuentes (y estadísticamente independientes) choques con las moléculas del líquido en el que se encuentran suspendidas, y b) el movimiento de estas últimas es tan complejo que su efecto sobre las moléculas en suspensión (choques) sólo puede describirse de manera probabilística. Einstein demostró que un tratamiento basado en estos supuestos llevaba a la ecuación de difusión.

Tres años después de la publicación del trabajo de Einstein, Langevin propuso una forma alternativa para deducir idéntico resultado que según él era mucho más simple. Aunque esto último es probablemente falso, su propuesta abrió el camino a otra rama importante de la Física y la Matemática Aplicada: las ecuaciones diferenciales estocásticas. Langevin incorporó en la ecuación de movimiento un término viscoso (en línea con el tratamiento clásico de la hidrodinámica) y una fuerza estocástica que describía los numerosos choques de la partícula en suspensión con las moléculas de fluido, Tras un álgebra simple que incluía el cálculo de promedios sobre un gran número de partículas, reprodujo el resultado de Einstein. El trabajo pionero de Langevin encontró una fundamentación rigurosa cuarenta años más tarde [1].

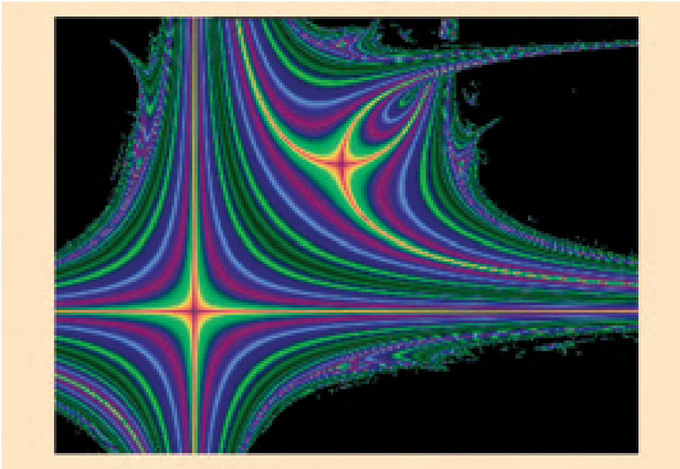
Las ecuaciones diferenciales estocásticas conducen a comportamientos erráticos no predecibles completamente (aunque los valores medios de las magnitudes relevantes sí puedan en algunos casos calcularse). En la actualidad son muchos los sistemas naturales que encuentran una descripción adecuada en algún tipo de ecuación diferencial estocástica. La impredecibilidad no es un feudo exclusivo de este tipo de ecuaciones. La ecuación de Langevin es una ecuación lineal y en ausencia de la fuerza estocástica, su comportamiento es perfectamente predecible. La incorporación de términos no lineales a las ecuaciones de movimiento conduce (cuando el número de grados de libertad es igual o mayor que 3) a comportamientos erráticos que, aunque perfectamente deterministas, pueden en la práctica ser indistinguibles de los procesos estocásticos. En efecto, la nolinealidad de las ecuaciones introduce una dramática dependencia de las condiciones iniciales, de tal forma que pequeñas variaciones en estas pueden inducir comportamientos que no se parezcan en nada al cabo de un cierto tiempo. Esta es la característica esencial del comportamiento caótico [4]. Dado que, en la práctica, no es posible controlar con precisión indefinida las condiciones iniciales, el comportamiento errático en un sistema caótico está servido (nótese, sin embargo, que estos sistemas son estrictamente deterministas ya que su comportamiento es predecible si no cambian las condiciones iniciales). Hoy día la Física de los fenómenos No Lineales va de la mano de la Física Estadística y, unidas, son las estrellas en lo que se ha dado en llamar Ciencia de la Complejidad.

Recientemente un estudio experimental ha intentado conectar caos y movimiento Browniano [5]. El experimento consistió en la caracterización cuantitativa del movimiento errático de una partícula coloidal suspendida en agua. Los autores encontraron una cota inferior a la suma de los exponentes de Lyapunov, que caracterizan la divergencia de trayectorias inicialmente infinitamente próximas, siendo por tanto una señal inequívoca de comportamiento caótico. Subrayan, por otra parte, que sus experimentos son la primera demostración de lo que se conoce como caos microscópico, en oposición al caos macroscópico ya observado experimentalmente en campos tan diversos como la hidrodinámica o las reacciones químicas oscilatorias. En referencia al caos microscópico, se cree que es responsable de las propiedades de equilibrio y no-equilibrio de los átomos y moléculas en fluidos y sólidos. Aunque el trabajo ha recibido numerosas críticas [6, 7] centradas fundamentalmente en que el caos microscópico es una condición suficiente pero no necesaria para producir movimiento Browniano (en el sentido de que sistemas no caóticos pueden también generarlo) la importancia de este trabajo parece fuera de toda duda. En un comentario publicado en el mismo número en el que aparece el trabajo experimental, los autores arguyen que sólo el movimiento mecánico caótico puede explicar la robustez de las propiedades macrocópicas (comportamientos promedio) y se preguntan que nivel de caos microscópico es necesario en sistemas de muchas partículas para garantizar el comportamiento regular observado experimentalmente [8].

Mas allá de estas cuestiones fundamentales sobre las distinciones o analogías entre caos y ruido y su carácter subyacente a muchos comportamientos macroscópicos, el estudio de procesos estocásticos no lineales [9] ha permitido entender una serie de fenómenos ubícuos, como son los efectos constructivos u ordenantes del ruido, o el de resonancia estocástica, descrito este originalmente en un contexto meteorológico y con gran relevancia en sistemas biológicos. Los procesos estocásticos fueron también utilizados desde muy temprano en el estudio de sistemas socioeconómicos [10] y en la descripción de leyes de potencias como las que caracterizan las distribuciones de Pareto, ubícuas en Biología y Economía.

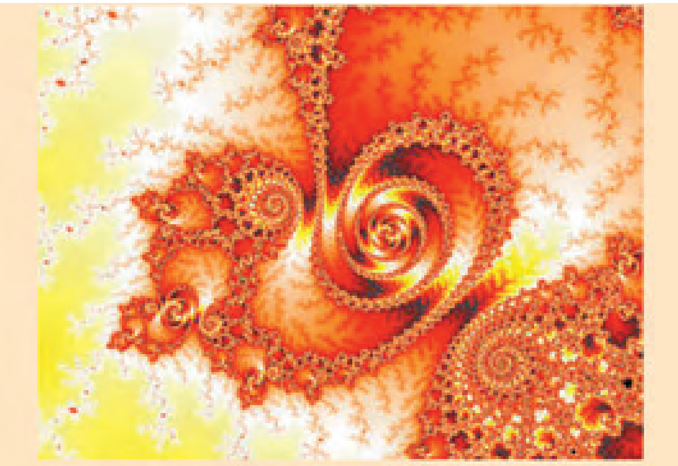
2. Fenómenos críticos

En 1925 Ising, que se encontraba estudiando el orden magnético en sólidos (ferro- y antiferromagnetismo) propuso un modelo que ha llegado a ser uno de los modelos más famosos de la Física. En su modelo, Ising restringía los grados de libertad del espín electrónico a dos (arriba y abajo) e introducía una interacción (a primeros vecinos) entre los espines de los electrones (localizados) de la red cuyo signo podría favorecer eventualmente el orden ferro- o antiferromagnético. El modelo de Ising es un brillante ejemplo de las “maneras” de la investigación científica. Propuesto para entender el magnetismo de los sólidos, pronto se convierte en un complejo problema de combinatoria. Sea un tablero formado por $m \times n$ cuadrados rojos y verdes. La pregunta es cuantas combinaciones existen tales que el número de fronteras rojo/verde esté fijado de antemano. El problema en dos dimensiones fue resuelto en 1960, y todavía no se conoce su solución exacta en tres dimensiones. Por otra parte, el de Ising es el modelo más simple que permite estudiar algunos aspectos de las transiciones orden-desorden en aleaciones binarias. El modelo de Ising es probablemente la máxima idealización (simplificación) de un sistema de partículas interactuantes y, a pesar de su "simplicidad", es todavía un desafío para la matemática. La importancia del modelo de Ising en la Física Estadística es enorme, hasta el punto de constituir el paradigma central de esta disciplina. Sus aplicaciones fuera del dominio tradicional de la Física Estadística provienen del hecho de contener los mecanismos y resultados básicos de fenómenos de interacción entre muchos elementos binarios.



El modelo de Ising tuvo una aportación indirecta de enorme transcendencia. En los años 60, Ken Wilson, siendo estudiante graduado, se propuso estudiar su solución exacta en dos dimensiones, como logro muy destacable de la física matemática. Su comprensión le permitió deducir el hecho de que, cerca de la temperatura de transición orden-desorden, el modelo tiene propiedades comunes a muchos otros de Física Estadística y Teoría de Campos. Esto le permitió formular la tesis de que, cerca de su punto crítico, muchos sistemas presentan propiedades universales, independientes de los sus detalles microscópicos [11]. La formulación cuantitativa de estas ideas mediante el Grupo de Renormalización le valió el Premio Nobel en 1982. La posibilidad de extraer propiedades universales para modelos con muchos grados de libertad e interacciones muy complejas, cambió sustancialmente el punto de vista de los físicos, y amplió en gran medida el tipo de problemas considerados abordables. En particular, puso en el objetivo de los físicos el estudio de propiedades universales que no pueden, por definición, depender de escalas determinadas por detalles del modelo. El comportamiento crítico es autosimilar, es decir que se caracteriza por ser invariante a cambios de escala. La Física Estadística se concentró en la determinación de magnitudes adimensionales. En particular de los exponentes en las leyes de potencia que determinan el comportamiento de las magnitudes de interés cerca del punto crítico y que caracterizan cuantitativamente la invarianza bajo cambios de escala. Una consecuencia inmediata fue la intensa búsqueda de leyes de escala en todo tipo de fenómenos naturales, con la esperanza de poderlos reducir a unas pocas clases de universalidad.

La ambición de miras de Física Estadística coincidió, a partir de los años 70, con el desarrollo a gran escala de la computación científica. La consecuencia fue la apertura de otra línea de ataque a problemas considerados previamente demasiado complejos: la simulación numérica. La eficacia de la simulación de un sistema cerca de un punto crítico se ve reforzada por la aplicación de las técnicas derivadas del grupo de renormalización mencionados anteriormente y el estudio sistemático de efectos de tamaño finito. Una de la síntesis de mayor interés de los enfoques basados en técnicas de renormalización y cálculo numérico a gran escala y que mayor proyección ha tenido en campos externos a la física, es quizás el estudio teórico de los vidrios de espín. Su culminación fue la propuesta realizada por G. Parisi en 1979 de una solución que no satisfacía la hipótesis de ergodicidad [12]. Esta solución partía de la formulación anterior de la existencia de frustración en estos sistemas, concepto que, obviamente, es fácilmente generalizable a campos muy diversos.



3. Invarianza de escala fuera del equilibrio termodinámico: Fractales, Agregación y Redes Complejas

Las ideas de comportamiento universal cautivaron la imaginación de los físicos que investigaron su validez en sistemas fuera del equilibrio termodinámico y sistemas más allá de la física, pero que admitieran una descripción tipo Ising, tales como la difusión de enfermedades, fuegos, o cualquier otro tipo de sistema que sufra una transición entre una situación pasiva (no hay enfermedad, fuego ...), y otra activa. La simulación numérica demostró la invarianza de escala, y, por tanto, su posible universalidad, en procesos de formación de patrones muy lejos del equilibrio y en procesos de crecimiento de dominios en la dinámica de no equilibrio de transiciones de fase [13].

Paralelamente a estos desarrollos y al de las técnicas de renormalización, B. Mandelbrot popularizó el concepto de fractal [14]. La geometría fractal permite identificar una simetría oculta en objetos aparentemente carentes de toda simetría. El fractal se caracteriza por ser autosimilar (en palabras de L. Kadanoff, “un fractal contiene copias de sí mismo dentro de sí mismo”) lo que implica que su masa es proporcional a L^D, siendo L una dimensión característica del objeto y D su dimensión fractal. Aunque la excesiva *vulgarización* del concepto de fractal trivializó de alguna manera el mensaje y, lo que es más grave, llevó a muchos investigadores a ver fractales en todas partes, no se puede minimizar su importancia. ¿Acaso alguien se atrevería a dudar de la enorme importancia del descubrimiento de la red cristalina? Y eso que en el caso de los sólidos cristalinos sus formas macroscópicas les delataban. A principios de la década de los ochenta se propuso un modelo que permitía crecer un objeto fractal: la agregación limitada por difusión. Era la primera incursión en profundidad de la Física Estadística en el campo de los fenómenos de crecimiento y agregación. Muchos fenómenos se ajustan a ese modelo o modelos similares: los coloides, el crecimiento de bacterias, la electrodeposición, las rupturas dieléctrica y mecánica, etc. Los físicos ya tenían un modelo que producía un fractal y, los más exigentes, iban a rechazar desde entonces todas las aplicaciones de los fractales no sustentadas en alguna medida en un modelo. Transcurridos veinte años desde su invención, todavía no se entiende por qué la agregación limitada por difusión produce objetos fractales. Sin duda este es un desafío de la mayor importancia. El concepto de fractal, intimamente ligado al de invariancia de escala, ha sido y está siendo utlilizado para poner orden en muchos problemas de la Física Estadística y No Lineal. Mencionemos por su enorme relevancia la caracterización mediante el concepto de fractal de la compleja geometría de los atractores extraños presentes en los sistemas caóticos (particularmente famoso es el del modelo de Lorenz, la archiconocida mariposa, ver [4]). La modelización en este campo también ha ayudado a los físicos a adentrarse en campos diversos.

Mas recientemente los físicos estadísticos han considerado la topología y estructura de las redes de interacciones que hay entre los elementos de sistemas sociales, biológicos o creados por el hombre como la "world wide web" [16]. Estas redes complejas distan de ser las redes regulares que forman la base del estudio tradicional de modelos reticulares de transiciones de fase, y son igualmente distantes de las redes aleatorias con distribución Poissoniana del número de coordinación. El estudio de gran cantidad de datos revela de nuevo que estas redes tienen unas características universales con invarianza de escala. Estas son también redes que crecen por agregación de elementos, con un funcionamiento independiente del cambio de escala producido por el crecimiento de las mismas. Es obvio que una nueva frontera es entender los fenómenos críticos de elementos que interaccionan a través de estas redes autosimilares.

4. Sistemas complejos

La comprensión de que fenómenos de naturaleza aparentemente muy diversa podían presentar comportamientos colectivos similares, y la observación mediante simulación por ordenador, de este tipo de procesos "emergentes" en modelos de procesos de evolución fuera del equilibrio, ha producido un cambio de paradigma científico que forma la base del estudio de sistemas complejos. Aunque se usan muchas definiciones diferentes de complejidad, pueden establecerse algunas características generales que identifican a los fenómenos críticos como su realización física prototipo: i) el comportamiento global no es reducible a la suma de las partes del sistema, ii) se trata de una situación intermedia entre el desorden aleatorio o caótico y una situación ordenada, como típicamente sucede en la proximidad del umbral de cambio de comportamiento o transición de fase, iii) se caracteriza por invarianza de escala y características universales. La ubicuidad del fenómeno de invarianza de escala que ya hemos mencionado proporciona una base cuantitativa común al estudio de sistemas complejos.

En términos más generales, podemos describir el estudio de sistemas complejos como el abandono de la idea de que los sistemas simples se han de comportar de manera simple (idea mecanicista), o la postura opuesta, que el comportamiento complejo obedece a causas complejas (renuncia a entender la realidad que nos circunda). Además, el hecho de que sistemas aparentemente muy distintos pueden comportarse de forma parecida refuerza el convencimiento del potencial que la Física Estadística tiene para abordar problemas muy variados. Obviamente, este planteamiento está en conflicto con las ideas reduccionistas características de otros campos de la física. En palabras de P. W. Anderson, "la hipótesis reduccionista no implica en manera alguna una hipótesis construccionista" [17]. El interés está en el comportamiento del sistema y no en la descripción de sus componentes. Esto es lo que permite abordar de una forma conceptualmente unificada una variedad de sistemas con componentes diversos, pero con comportamientos globales similares. Algunos de estos estudios, como el fenómeno de sincronización de aplausos en un concierto pueden parecer divertimentos esotéricos, pero otros, como los que mencionamos a continuación, tienen clara relevancia social y "aplicada".

5. Nuevos desafíos

Queremos terminar indicando algunos campos que reflejan la presencia ubicua de la Física Estadística y No Lineal y en los que el uso de los conceptos discutidos previamente están produciendo resultados particularmente interesantes:

- *Matemáticas y Ciencias de la Computación*. Los métodos de solución de sistemas desordenados se aplican al estudio de problemas de optimización NP completos (o sea, muy díficiles), y a problemas (igualmente NP completos) de compatibilidad de cláusulas lógicas. No es descartable que otros conceptos relacionados con el estudio de sistemas desordenados, como la estadística de matrices aleatorias, tengan aplicación en problemas de teoría de números, tales como la distribución de números primos [18].
- *Ciencias de la vida*. La biología teórica se ha beneficiado desde sus inicios de aportaciones de científicos provenientes de otros campos, y, en especial, de la Física Estadística y No Lineal. En la actualidad, ideas de sistemas dinámicos no lineales se aplican al análisis de percepción acústica de señales. El análisis de series temporales caóticas o el estudio de ondas excitables son instrumento útiles para entender disfunciones del corazón. El problema del plegamiento de las proteínas está siendo analizado con técnicas derivadas del estudio de sistemas desordenados. Ideas basadas en transiciones de fase fuera del equilibrio se están aplicando al estudio de la dinámica de poblaciones, evolución, propagación de infecciones, o procesos de extinción catastrófica. Estructuras fractales y fenómenos de advección caótica permiten entender la distribución del plankton en los océanos. Modelos de crecimiento tipo DLA ayudan a describir el crecimiento de praderas de vegetación marina.
- *Ciencias de la Tierra*. La ideas de procesos autoorganizados fuera del equilibrio han sido aplicadas a la dinámica de terremotos, formación de cuencas fluviales, o distribución de lluvias. Patrones similares a los estudiados en el modelo DLA, mencionado anteriormente, han sido observados en diversas formaciones geológicas.
- *Economía*. Gran parte del esfuerzo en esta dirección se ha dedicado al análisis de datos en series temporales de mercados financieros, en un intento de tener cierta capacidad de predicción a corto plazo. Esto es el núcleo de lo que ha venido en llamarse Econofísica [20]. También se ha dado soporte teórico a leyes de potencia (bien conocidas empíricamente) para la distribución de riqueza. Más en la dirección de modelización del comportamiento de agentes económicos se ha descrito el comportamiento gregario de agentes de bolsa y el "juego de la minoría" [19] como modelo simplificado de las interacciones entre esos agentes. Esta es quizás una de las contribuciones más destacables de los físicos que ha permitido estudiar cuestiones díficilmente abordables con las técnicas ortodoxas en economía teórica, ya que no da por supuesto la existencia de mercados infinitamente eficientes.
- *Sociología*. Aunque los métodos de la física y la sociología y temas afines parecen muy remotos, ya hace 10 años que Physical Review comenzó a publicar artículos de psicólogos donde se definían "parámetros de orden" para problemas sociales [23]. El desafío en este contexto es el de definir preguntas e identificar genéricos en el comportamiento colectivo de sistemas sociales [21]. Un ejemplo actual de fenómeno colectivo es el de de globalización cultural. Existen trabajos que hacen uso de los conceptos de la mecánica estadística de equilibrio [22] mientras otros elaboran modelos reticulares de no equilibrio, como el modelo del votante y la abundante literatura de "modelos basados en agentes". También existen ramificaciones en la teoría de juegos evolutivos y juegos espaciales. En esta temática, a pesar de su gran potencial de futuro, es importante ser consciente de que los científicos de las ciencias sociales llevan tiempo pensando en estos problemas: frases como "Este artículo trata de los mecanismos que traducen el comportamiento individual desorganizado en resultados colectivos", aparecen en la literatura sociológica [24] en 1971, cuando los físicos estadísticos estaban desarrollando conceptos similares.

6. A modo de conclusiones

Los desarrollos que hemos discutido aquí han fomentado la colaboración de los físicos con científicos de otras disciplinas. El resultado es, sin duda, globalmente positivo, pero no está de más señalar que la "energía de activación" necesaria para que la colaboración se produzca no suele ser despreciable. El entender bien la fenomenología de los procesos que se estudian no es una cuestión trivial. Los métodos matemáticos utilizados en Física Estadística no suelen satisfacer a los teóricos más rigurosos de otros campos, o son de díficil comprensión para aquellos más próximos a la observación. Cada disciplina tiene su jerga y procedimientos para, entre otras cosas, mantener fuera a los no iniciados. Sin embargo, la combinación de rigor (relativo), y capacidad de adaptación, hace que la formación de un físico sea un buen punto de partida para el estudio de problemas interdisciplinares. No estaría de más que la comunidad de físicos hiciera el mayor esfuerzo posible para aprovechar estas ventajas, y pusiera todos los medios para reducir las barreras de entrada. Para ello, el fomentar reuniones con otros colectivos de científicos puede ser muy útil. Sin embargo, dado que la montaña no se va a mover, somos los físicos los que hemos de hacer el esfuerzo de dominar los aspectos más fenomenólogicos de las otras disciplinas, y traducir a su lenguaje nuestros métodos y conceptos [24].

En todos los campos enumerados aquí son notables las contribuciones de físicos españoles. No hay más que darse una vuelta por las reuniones de Física Estadística organizadas cada dieciocho meses desde 1986 por grupos distribuídos por toda la geografía española, para constatar este hecho. Las reuniones de Física Estadística se están celebrando desde hace casi 20 años con éxito creciente (en las últimas reuniones el número de asistentes se ha acercado a los doscientos) y son una buena muestra de la capacidad de adaptación de la comunidad a los nuevos retos.

Como reflexión final sobre las nuevas direcciones de la Física Estadística y No Lineal se puede indicar que en los nuevos campos que abre se establece una nueva relación entre ciencia teórica y aplicada. La ciencia aplicada se consideraba en el pasado normalmente ligada a la actividad experimental y, en el caso de la Física Estadística, a la aplicación de conocimientos al estudio del comportamiento de materiales de estado sólido y más recientemente de materia condensada "blanda". La tecnología estaba ligada a la fabricación de dispositivos. Los avances impulsados por los practicantes de la Física Estadística y No Lineal en campos como desarrollos de algoritmos y manejo de la información, redes complejas, organización empresarial, análisis de mercados o estudios de formación de opinión y de cooperación social, implican una ciencia aplicada basada en el establecimiento de nuevos conceptos y realidades virtuales, más que en la producción industrial post-prototipo. En suma, se trata de la punta de lanza fuera del ámbito tradicional de las " ciencias naturales", con un fundamento epistemológico distinto al enfoque reduccionista, y en la frontera intelectual de los valores de la nueva sociedad del conocimiento. Tal punto de vista es un contrapunto a las voces agoreras que hablan de la Física como ciencia del siglo pasado y sin grandes desafíos para el futuro.

Referencias

[1] C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Springer-Verlag, Berlin, 1997).

[2] Sin menospreciar las cruciales aportaciones de Boltzmann y Gibbs, los tratamientos de los sistemas dinámicos propuestos por Einstein y Langevin abren las puertas a una nueva aproximación a los sistemas fuera del equilibrio, y a generalizaciones a cuestiones más interdisciplinares. El estudio de sistemas en equilibrio ya había tenido un éxito espectacular: la modificación por Max Planck de las leyes de equilibrio de la radiación marcó el nacimiento de la mecánica cuántica. Ver el artículo por P. Tarazona y E. Chacón, en este número.

[3] Cabe destacar que el tratamiento del movimiento Browniano, bajo la forma general de procesos estocásticos, fue, independientemente, uno de los primeros logros de la matemática aplicada a las finanzas. L. Bachelier, *Théorie de la Speculation*, Thesis, Annales Scientifiques de l'école Normale Supérieure. París (1900).

[4] S.H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos* (Perseus books, Reading, 1994). Ver también al artículo por F. Falo, R. Chacón, y L. M. Floria, en este número.

[5] P. Gaspard, M.E. Briggs, M.K. Francis, J.V. Sengers, R.W. Gammon, J.R. Dorfman y R.V. Calabrese, "Experimental evidence for microscopic chaos", *Nature* **394**, 865 (1998).

[6] D. Dürr y H. Spohn, "Brownian motion and microscopic chaos", *Nature* **394**, 831 (1998).

[7] C. P. Dettmann, E. G. D. Cohen, y H. van Beijeren, "Microscopic chaos from brownian motion?", *Nature* **401**, 875 (1999).

[8] Para más información, ver el artículo de J. M. Sancho, F. Sagués, y J. García-Ojalvo, en este número.

[9] Stochastic effects in physical systems (M. San Miguel y R. Toral) en "Instabilities and Nonequilibrium Structures VI". Pags. 35-130. Eds. Enrique Tirapegui, Javier Martínez, y Rolando Tiemann (Kluwer Academic Publishers,2000)

[10] E. W. Montroll, "Social dynamics and the quantifying of social forces", *Proc. Nat. Acad. Sci* **75**, 4633 (1978).

[11] Esta hipótesis ya había sido formulada de forma implícita por Lev D. Landau, y descrita de manera intuitiva por Leo Kadanoff.

[12] G. Parisi, *Phys. Lett.* **73A**, 203 (1979); *J. Phys.* A **13**, L115 (1980).

[13] Ver el artículo de C. Pérez García en este número.

[14] B Mandelbrot, *The fractal geometry of nature* (Freeman, San Francisco, 1982)

[15] D. Avnir, O. Biham, D. A. Lidar, y O. Malcai, *The Limited Scaling Range of Empirical Fractals*, Science, **279**, 39 (1 998). En este artículo se demuestra que en la mayoría de los casos los ajustes para obtener D no cubren más de dos décadas.

[16] A. L. Barabasi y R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999).

[17] P. W. Anderson, "More is different", *Science* **177**, 393 (1972).

[18] Tampoco se puede excluir que, algún día, la computación cuántica ayude a resolver los problemas NP completos.

[19] http://www.unifr.ch/econophysics/minority

[20] R. Mantegna y H. Stanley, *An Introduction to Econophysics*, (Cambridge University Press 2000)

[21] http://www.ais.fhg.de/~frank/sociophysics/

[22] L. Blume, "The statistical mechanics of strategic interaction", Games and Economic Behavior **5**, 387 (1993); **11**, 111 (1995).

[23] A. Lewenstein, B. Nowak, B. Latane, "Statistical Mechanics of Social Impact", *Physical Review* A **45**, 763 (1992).

[24] T. Schelling, "Dynamic models of segregation", *J. Math. Sociology* **1**, 143 (1971).

[25] En este sentido, es ejemplar el enfoque del libro de E. Schrödinger, *What is life*, Cambridge U. Press (1944).

F. Guinea
está en el Dpto. de Teoría de la Materia Condensada. Instituto de Ciencia de Materiales de Madrid. CSIC
E. Louis
está en el Dpto. de Física Aplicada y Unidad Asociada del CSIC. Univ. de Alicante
y M. San Miguel
están en el Instituto Mediterráneo de Estudios Avanzados. IMEDEA. CSIC-UIB. Palma de Mallorca