La Teoría de la Relatividad Especial

Pedro Pascual, Juan Ignacio Latorre

Introducción

En el año 1905, Albert Einstein (Ulm 1879 - Princeton, New Jersey 1955) era un empleado en la oficina de patentes de Berna. Fue en ese año cuando publicó tres de sus trabajos fundamentales en el efecto fotoeléctrico, en el movimiento Browniano y la Teoría de la Relatividad Especial, cualquiera de los cuales le habría hecho merecedor de un puesto en la historia de la Física. Este artículo se centra en el último de ellos que fue publicado en *Annalen der Physik* **17**, 891 (1905). No intentaremos hacer una historia detallada de cómo Einstein llegó a formular su teoría, ni como ésta se fue desarrollando. El lector interesado en estos aspectos puede consultar el magnífico libro de Abraham Pais {Amsterdam 1918 - Copenhague 2000} "*Subtle is the Lord... The Science and the Life of Albert Einstein*" (Oxford University Press, 1982).

Einstein recibió el Premio Nobel de Física de 1921 "por sus servicios a la Física Teórica, y especialmente por su descubrimiento de la ley del efecto fotoeléctrico". Pais opina que en aquellos momentos todo el mundo era consciente de la importancia del efecto fotoeléctrico y sus implicaciones en los principios de la emergente Mecánica Cuántica y, si bien no habían dudas sobre la teoría de la Relatividad Especial, la Relatividad General y su explicación del campo gravitatorio no eran todavía universalmente aceptadas. Independientemente de la opinión de sus colegas, Einstein dedicó su discurso Nobel a la Teoría de la Relatividad.

En este breve artículo intentaremos dar una idea de los puntos conceptuales y técnicos más importantes de la Teoría de la Relatividad Especial, sin prestar atención a cómo ésta se fue desarrollando y de cómo fue siendo aceptada por la comunidad científica de la primera mitad del siglo XX. La Teoría de la Relatividad puede entenderse como un conflicto entre la estructura de la vigente teoría de los campos electromagnéticos y el paradigma newtoniano. Las ecuaciones del campo electromagnético contienen necesariamente las limitaciones que impone una velocidad de propagación finita. Einstein logró elevar a principio los elementos que subyacen en esta estructura y adaptó la dinámica newtoniana a su nuevo formalismo. Nuestro recorrido, pues, parte de la teoría clásica del campo electromagnético.

La teoría del campo electromagnético

James Clerk Maxwell (Edimburgo 1831 - Cambridge 1879) publicó en 1873 su famoso libro "A Treatise on Electricity and Magnetism" en el que establecía la teoría del campo electromagnético. En notación moderna, este campo viene caracterizado por el vector campo eléctrico, $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ y el llamado inducción magnética, $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$, ambos funciones del instante de tiempo y del punto del espacio considerado. Si en el espacio existe una densidad de carga eléctrica $\rho(t, \mathbf{x})$ y una densidad de corriente eléctrica $\mathbf{j}(t, \mathbf{x})$, entonces $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ vienen determinados por un conjunto de ecuaciones, conocidas con el nombre de ecuaciones de Maxwell, que en el vacío y en el sistema unidades de Gauss, se escriben:

$$\begin{aligned} &\nabla\times\mathbf{E}+(1/c)\,\partial\mathbf{B}/\partial\mathbf{t}=0 && \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \\ &\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho && \nabla\times\mathbf{B}-(1/c)\,\partial\mathbf{E}/\partial\mathbf{t}=(4\pi/c)\,\mathbf{j} \end{aligned} \tag{1}$$

La velocidad de la luz en el vacío es c = 299 792 458 m s^{-1}. Hoy en día, c es una constante fijada por convenio y que, consecuentemente, no podemos medir puesto que se utiliza para definir el patrón de distancia a partir del patrón de tiempo basado en el Cesio. Es interesante notar que hoy en día la precisión del patrón de tiempo es inferior a la de ciertos experimentos realizados en otros sistemas cuánticos. Tarde o temprano, el patrón Cesio deberá ser abandonado pero la velocidad de la luz seguirá siendo una definición.

La densidad de carga y de corriente eléctrica están relacionadas a través de la ecuación de continuidad

$$\nabla\cdot\mathbf{j}+\partial\rho/\partial\mathbf{t}=0 \tag{2}$$

que implica la conservación de carga total en un sistema físico.

La ley de Coulomb entre dos partículas cargadas y la fuerza sobre una partícula en el seno de un campo electromagnético vienen dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{F}=(Q_1Q_2/r^3)\mathbf{r},\qquad \mathbf{F}=Q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}/c) \tag{3}$$

De aquí es fácil probar a partir de (1) que en las zonas del espacio en que la densidad de carga y de corriente eléctrica son nulas se cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned} (1/c^2)\,\partial^2\mathbf{E}/\partial t^2-\partial^2\mathbf{E}/\partial x^2-\partial^2\mathbf{E}/\partial y^2-\partial^2\mathbf{E}/\partial z^2=0 \\ (1/c^2)\,\partial^2\mathbf{B}/\partial t^2-\partial^2\mathbf{B}/\partial x^2-\partial^2\mathbf{B}/\partial y^2-\partial^2\mathbf{B}/\partial z^2=0 \end{aligned} \tag{4}$$

Éstas son las ecuaciones que describen la propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío. Se puede probar que su velocidad de propagación es c, basta tener en cuenta la ecuación unidimensional equivalente

$$(1/c^2)\,\partial^2 A(t,x)/\partial t^2-\partial^2 A(t,x)/\partial x^2=0 \tag{5}$$

Introduzcamos ahora las variables $\eta = x - ct$ y $\xi = x + ct$ y con $B(\eta, \xi) = A(t, x)$ la ecuación (5) se transforma en

$$\partial^2 B(\eta,\xi)/\partial\xi\,\partial\eta=0 \tag{6}$$

cuya solución más general es

$$A(t,x)=t(x-ct)+g(x+ct) \tag{7}$$

siendo f y g funciones arbitrarias cuya dependencia muestra que c corresponde a la velocidad de propagación de los campos.

Surge entonces la pregunta: ¿son estas ecuaciones válidas sólo en algún sistema inercial privilegiado en el que la velocidad de la luz es c? Sería de esperar, de acuerdo con las ideas clásicas, que si un observador se moviera siguiendo un rayo de luz con velocidad v, viera para la luz la velocidad $c - v$.

Una primera solución que se propusó fue suponer que las ecuaciones de Maxwell sólo son válidas en un sistema inercial ligado con el éter, que a finales del siglo XIX y principios del XX se creía llenaba todo el espacio. Por éstos tiempos se hicieron múltiples experiencias para determinar nuestra velocidad con relación al éter, siendo, probablemente, las más famosas las de Armand Hippolyte Louis Fizeau (París 1819 –Venteuil, Seine-et-Marne 1896) y las de Albert Abraham Michelson (Strelno, Prusia 1852– Pasadena, California 1931) y colaboradores. Todas estas experiencias dieron resultados nulos. Si bien ninguna de ellas es mencionada explícitamente en los trabajos de Einstein, ya en el primero de ellos hace referencia a los intentos fallidos de medir nuestra velocidad con relación al éter. Sorprendentemente su trabajo no tiene ni una sola referencia.

La Teoría de la Relatividad de Einstein eliminaría el sentido del éter ya que eleva a postulado el hecho de que la velocidad de la luz es la misma en cualquier sistema de referencia inercial. Todo intento de medir un sistema de referencia privilegiado es inútil. El éter murió sin haber nacido.

Desde un punto de vista matemático es necesario establecer que transformaciones dejan covariantes a las ecuaciones de Maxwell. Entender esta simetría es el paso previo a extenderla a toda la física clásica. El razonamiento de Einstein es admirable. Las ecuaciones de Maxwell describen correctamente todos los fenómenos electromagnéticos y están asociados a velocidades lumínicas. En cambio, las ecuaciones de Newton no se adaptan al mismo esquema. Si entendemos el grupo de transformaciones que rigen el cambio de sistema de referencia en el electromagnetismo y elevamos a principio la covariancia de las ecuaciones dinámicas de todo sistema bajo ese grupo, dispondremos de la herramienta necesaria para extender la física clásica. El grupo de simetría lleva el nombre de Poincaré.

El grupo de Poincaré

El llamado grupo de Poincaré [Henri Poincaré (Nancy 1854 - París 1912)] se define hoy día como el conjunto de aquellas transformaciones lineales reales e inhomogéneas:

$$\{a,\Lambda\}: \qquad x \to \Lambda x + a, \;\; (x^{\mu} \to \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}) \tag{8}$$

(empleamos los índices griegos de 0 a 3 y los latinos de 1 a 3; también emplearemos ocasionalmente la notación $x^0 = c\,t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$) que dejan invariante la distancia Minkowskiana [Rudolf Minkowski (Estrasburgo 1895 - Berkeley, California 1976)]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = dx^T G\, dx \tag{9}$$

donde dx indica la matriz columna de elementos (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3), dx^T su traspuesta y G es la matriz cuatro por cuatro (o métrica de Minkowski) de elementos

$$G_{\mu\nu} = 0 \;\text{ si }\; \mu \neq \nu,\; G_{00} = +1, \;\; G_{11} = G_{22} = Gg_{33} = -1 \tag{10}$$

Por lo tanto, una transformación es de Poincaré si y sólo si

$$a^* = a, \qquad \Lambda^* = \Lambda, \qquad \Lambda^T G \Lambda = G \tag{11}$$

donde el asterisco indica tomar el complejo conjugado. De la última de estas relaciones se deduce que $(\det \Lambda)^2 = 1$ y, por lo tanto

$$\det \Lambda = \pm 1 \tag{12}$$

lo que asegura que las transformaciones consideradas tienen inversa. Además, tomando la inversa de (11) se obtiene (Λ^{-1}) $G(\Lambda^{-1})^T = G$ y de esta relación resulta

$$\Lambda G \Lambda^T = G \tag{13}$$

De (8) se deduce

$$\begin{aligned} &\{a_1,\, \Lambda_1\}\{a_2,\, \Lambda_2\} = \{a_1 + \Lambda_1 a_2,\, \Lambda_1\Lambda_2\} \\ &\{a,\, \Lambda_1\}^{-1} = \{-\Lambda^{-1} a,\, \Lambda^{-1}\} \end{aligned} \tag{14}$$

Con estas propiedades es inmediato probar que las transformaciones de Poincaré forman un semigrupo.

Una propiedad importante que se deduce fácilmente de (13) es $\Lambda_{\lambda\mu}\,\Lambda^{\lambda}_{\nu} = g_{\mu\nu}$ y si hacemos $\mu = \nu = 0$ se tiene $\Lambda_{0\mu}\,\Lambda^{\lambda}_{0} = 1$, esto es $(\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^k_0)^2 = 1$ de donde

$$(\Lambda^0_0)^2 \geq 1 \tag{15}$$

Trasformaciones particularmente importantes son las rotaciones caracterizadas por:

$$x'^{\mu} = [R(\mathbf{n},\theta)]^{\mu}_{\nu}\, x^{\nu} \tag{16}$$

con

$$\begin{aligned} &t' = t \\ &\mathbf{x}' = \mathbf{x} - (1-\cos\theta)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})\mathbf{n} + (\mathbf{x}\times\mathbf{n})\sin\theta \end{aligned} \tag{17}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario y ésta transformación no es más que una rotación de ángulo θ alrededor del eje $\mathbf{n}$. Estas transformaciones forman el grupo de las rotaciones.

Otras transformaciones particularmente importantes son las llamadas transformaciones de Lorentz [Hendrik Antoon Lorentz (Arnhem, Holanda 1853 - Haarlem, Holanda 1928)], que vienen dadas por

$$x^{-\mu} = [B(\mathbf{v})]^{\mu}_{\nu}\, x^{\nu} \tag{18}$$

con

$$\begin{aligned} &t' = (t + \mathbf{v}\cdot\mathbf{x}/c^2)/\left(1-(v/c)^2\right)^{1/2} \\ &\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \left(1/\left(1-(v/c)^2\right)^{1/2} - 1\right)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x})\,\mathbf{v}/\mathbf{v}^2 + \mathbf{v}t/\left(1-(v/c)^2\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{19}$$

Estas transformaciones no constituyen un grupo. Sin embargo si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son paralelas entonces:

$$B(\mathbf{v}_1)\,B(\mathbf{v}_2) = B\left((\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/(1 + \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2/c^2)\right) \tag{20}$$

Es decir que las transformaciones de Lorentz para velocidades en una misma dirección forman un grupo. En particular

$$B(\mathbf{v})\,B(-\mathbf{v}) = 1 \tag{21}$$

Hemos mencionado las rotaciones y las transformaciones de Lorentz porque se puede probar que cualquier transformación de Poincaré homogénea ($a \equiv 0$) con det $\Lambda = +1$ y $(\Lambda^0_0) \geq 1$ se puede escribir de forma única como

$$\Lambda = B(\mathbf{v})R(\mathbf{n},\theta) = R(\mathbf{n}',\theta')B(\mathbf{v}') \tag{22}$$

La isotropía del espacio nos garantiza la invariancia bajo rotaciones y por tanto a partir de este momento sólo se tendremos en cuenta las transformaciones de Lorentz.

Una forma simple de deducir las transformaciones de Lorentz es la siguiente. Supongamos que en el instante $t = 0$ se emite desde el origen de un sistema de coordenadas (O, x, y, z) una señal luminosa. Un observador inercial S, solidario con este sistema de referencia, verá que en un cierto instante t los puntos alcanzados por el frente de ondas son aquellos que cumplen

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \tag{23}$$

Consideremos ahora un segundo observador inercial S' tal que en $t = 0$, los orígenes de sus sistemas de referencia coincidan $O = O'$ y que (O', x', y', z') y que se mueve con relación al primer sistema de referencia con una velocidad v paralela al eje Ox. La constancia de la velocidad de la luz en todos los sistemas inerciales obliga a que S' verá que los frentes de ondas deben satisfacer la ecuación

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \tag{24}$$

¿Qué relación hay entre las coordenadas medidas por ambos observadores? Si exigimos que, de acuerdo a la homogeneidad del tiempo y del espacio, las coordenadas usadas por S' estén relacionadas linealmente con las usadas por S entonces se encuentra que

$$\begin{aligned} t' &= A(v)(t + vx/c^2)/\left(1-(v/c)^2\right)^{1/2} \\ x' &= A(v)(x+vt)/\left(1-(v/c)^2\right)^{1/2},\ y' = A(v)\,y,\ z' = A(v)\,z \end{aligned} \tag{25}$$

Como el producto de esta transformación y su inversa debe dar la identidad entonces

$$A(v)\,A(-v) = 1 \tag{26}$$

La simetría exige que las transformaciones de las coordenadas y y z no cambien si cambiamos v por $-v$ y por tanto $A(v) = 1$ con lo que las transformaciones (25) se convierten en

$$\begin{aligned} t' &= (t + vx/c^2)/\left(1-(v/c)^2\right)^{1/2} \\ x' &= (x+vt)/\left(1-(v/c)^2\right)^{1/2},\quad y' = y,\ z' = z \end{aligned} \tag{27}$$

que no son más que un caso particular de (19), que se obtiene haciendo $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$.

Notemos que, si $v \ll c$, las transformaciones de Lorentz se convierten en las transformaciones de Galileo [Galilei Galileo (Pisa 1564 - Arcetri, cerca de Florencia 1642)]

$$t' = t, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}t \tag{28}$$

que son las que conectan dos sistemas inerciales en el marco de la mecánica clásica no relativista.

Es evidente que las ecuaciones (4) no mantienen su forma bajo las transformaciones de Galileo. ¿La mantienen bajo las transformaciones de Lorentz? La contestación afirmativa a esta pregunta es anterior al trabajo de Einstein, pues en 1887 Woldemar Voigt (Leipzig 1850 - Gotinga 1919) se dio cuenta que las ecuaciones (4) mantenían su forma bajo la transformación (21) con $A(v) = (1 - (v/c)^2)^{1/2}$. El resultado es verdaderamente importante pero pasó desapercibido y el mismo Lorentz así lo reconoció en 1906 en unas conferencias que dio en la Columbia University. Evidentemente si los sistemas inerciales estaban relacionados por las transformaciones de Lorentz entonces las ecuaciones de Maxwell son válidas en todos los sistemas inerciales, las experiencias de tipo Michelson y similares dan forzosamente resultados nulos y no hay más remedio que revisar la mecánica clásica. Este debió ser el razonamiento de Einstein.

Cinemática relativista

Antes de analizar como debe modificarse la mecánica clásica, nos detenemos a considerar algunas consecuencias de las transformaciones de Lorentz.

Composición de velocidades

Supongamos dos observadores inerciales S y S' y un suceso P que según S tiene unas coordenadas (t, $\mathbf{x}$) y según S' unas coordenadas (t', $\mathbf{x}'$). Si el suceso es un punto en movimiento las velocidades atribuidas por S y S' son:

$$v = d\mathbf{x}/dt, \quad \mathbf{v}' = d\mathbf{x}'/dt' \tag{29}$$

Si la velocidad de S' con relación a S es $\mathbf{V}$, se deduce inmediatamente de (19)

$$\mathbf{v}' = d\mathbf{x}'/dt' = \left[\left(1-(V/c)^2\right)^{1/2}/(dt + \mathbf{V}\cdot d\mathbf{x}/c^2)\right]$$
$$\left[d\mathbf{x} + \left(1/(1-(V/c)^2)^{1/2} - 1\right)(\mathbf{V}\cdot d\mathbf{x})\,\mathbf{V}/V^2 + \mathbf{V}\,dt/(1-(V/c)^2)^{1/2}\right]$$

es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \left[\left(1-(V/c)^2\right)^{1/2}/(1+\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}/c^2)\right] \\ &\left[\mathbf{v} + \left(1/(1-(V/c)^2)^{1/2} - 1\right)(\mathbf{V}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{V}/V^2 + \mathbf{V}/(1-(V/c)^2)^{1/2}\right] \end{aligned} \tag{30}$$

Notemos que si $V \ll c$ entonces se obtiene la ley de suma de velocidades de Galileo

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{V} \tag{31}$$

Por otra parte, si $\mathbf{v} = (0, 0, c)$ y $\mathbf{V} = (0, 0, V)$ se obtiene $\mathbf{v}' = (0, 0, c)$.

Si para simplificar suponemos que $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$, entonces

$$\begin{aligned} v'_x &= (v_x + V)/(1 + V\,v_x/c^2), \\ v'_y &= v_y(1-(V/c)^2)^{1/2}/(1 + V\,v_x/c^2), \\ v'_z &= v_z(1-(V/c)^2)^{1/2}/(1 + V\,v_x/c^2). \end{aligned} \tag{32}$$

Se pueden dar otras definiciones equivalentes a la velocidad tales como $\mathbf{w} = d\mathbf{x}/d\tau$, llamada celeridad, o la rapidez que se puede definir como $\varphi = c\ \mathrm{arctanh}\ (v/c)$.

Simultaneidad, pasado y futuro

Sean dos sucesos que para S tienen coordenadas (t_1, $\mathbf{x}_1$) y (t_2, $\mathbf{x}_2$). Veamos como ve estos sucesos el observador S'. De (19) se deduce inmediatamente

$$t_2' - t_1' = \left[(t_2 - t_1) + \mathbf{V}\cdot(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)/c^2\right] / \left[1/(1-(V/c)^2)^{1/2}\right] \quad (33)$$

Supongamos que S ve los dos sucesos simultáneos, es decir $t_2 = t_1$; de (33) resulta que en general los tiempos que ve S' no son iguales y por tanto la simultaneidad es un concepto relativo.

Supongamos que S ve los dos sucesos como $t_2 > t_1$. Para que podamos asegurar que $t_2' > t_1'$ cualquiera que sea $\mathbf{V}$ es necesario que $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| / [(t_2 - t_1) < c$, es decir que los dos sucesos se puedan relacionar con una señal física que viaje a velocidad menor que la de la luz. Esto es evidente necesario pues en este caso puede existir una relación causa efecto y esto implica que $t_2' > t_1'$.

Evidentemente en todos estos casos y suponiendo que $V \ll c$ entonces $t_2' - t_1' = t_2 - t_1$ como era de esperar.

Contracción de longitudes y dilatación de tiempos

Supongamos un observador S y colocada según Ox una varilla en reposo. Supondremos $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$. En un instante t mide la posición de los dos extremos de la varilla y encuentra las coordenadas (t, x_2) y (t, x_1) y entonces concluye que su longitud es $L_0 = x_2 - x_1 > 0$. ¿Qué longitud encuentra el observador inercial S'? En un instante t' mide las coordenadas de los dos extremos y encuentra una longitud

$$L = x_2'(t') - x_2'(t') \quad (34)$$

Como de (19) se obtiene

$$x_2 = [x_2'(t') - Vt']/(1-(V/c)^2)^{1/2},$$
$$x_1 = [x_1'(t') - Vt']/(1-(V/c)^2)^{1/2} \quad (35)$$

resulta inmediatamente que

$$L = L_0(1-(V/c)^2)^{1/2} \quad (36)$$

Es decir que cualquier observador en movimiento verá la varilla acortada.

Supongamos ahora que un reloj esta en reposo en S y que medimos en el un intervalo de tiempo con coordenadas (t_2, x) y (t_1, x) y por tanto el intervalo de tiempo entre los dos sucesos es $\tau = t_2 - t_1 > 0$, que es el llamado tiempo propio. Para el observador S' y usando la ecuación (33) se obtiene inmediatamente que $T = t_2' - t_1'$ está relacionado con T_0 por la ecuación

$$T = \tau/(1-(V/c)^2)^{1/2} \quad (37)$$

y el observador S' mide siempre un intervalo de tiempo mayor que el tiempo propio.

Como aplicación de ésta última expresión se puede tener en cuenta que la radiación cósmica primaria produce unas partículas llamadas μ^- (muones) en la parte más alta de la atmósfera, es decir, a unos 100 km de la superficie terrestre. La vida media de esta partícula es del orden de $\tau = 2.2 \times 10^{-6}$ segundos y supongamos que su velocidad inicial es tal que $(v/c)^2 = .9999$. Estos muones se observan frecuentemente en la superficie terrestre y deseamos entender porque esto es posible. Si se razona de acuerdo con la física clásica estas partículas, que van prácticamente a la velocidad de la luz, para recorrer los 100 km necesita un tiempo del orden de $t = 3.3 \times 10^{-4}$ s. Si N_0 es el número de muones inicialmente producidos, entonces de acuerdo con la bien conocida ley de desintegración exponencial $N(t) = N_0 \exp(-t/\tau)$, el número de los que llegan a la superficie de la tierra es del orden de $N = 7.2 \times 10^{-66} N_0$, y por tanto contra la evidencia experimental no pueden llegar, prácticamente, muones a la superficie terrestre. Veamos lo que sucede teniendo en cuenta los efectos relativistas. Para el observador terrestre y de acuerdo con (37) se obtiene que ve como si la vida media del muón fuera $T = 2.2 \times 10^{-4}$ s por tanto usando la ley de desintegración exponencial $N = 0.223\, N_0$, es decir llegan a la superficie terrestre, aproximadamente, una cuarta parte de las partículas producidas. Supongamos un observador solidario con el muón; la distancia que debe recorrer de acuerdo con (36) es 1 km y el tiempo que tardará en hacerlo es $T = 3.3 \times 10^{-6}$ s y aplicando de nuevo la ley de desintegración exponencial se encuentra de nuevo que $N = 0.223\, N_0$.

Paradojas

El ejemplo anterior es la solución a un tipo de paradojas que propicia la Teoría de la Relatividad. La vida media de un muón difiere en función del observador. Tal vez la paradoja más célebre es la de los gemelos. Dos hermanos gemelos se separan, uno se queda en la Tierra y el otro toma una nave espacial y realiza un viaje interestelar a velocidades próximas a la de la luz. Tras el largo viaje, retorna a la Tierra y se reencuentra con su hermano que para su sorpresa es mayor que él. La paradoja surge al considerar que ambos hermanos ven al otro alejarse y volver. Ambos deberían creer que el otro es más joven. Pero esto no es así porque no existe tal simetría. El hermano viajero tiene asociado un sistema no inercial ya que sufre aceleraciones. Él es más joven.

Otra paradoja curiosa es la llamada paradoja de los cohetes de Bell. Bell propuso considerar dos cohetes situados uno encima de otro verticalmente y ligados por una cuerda tensa. Ambos cohetes despegan simultáneamente en la dirección vertical con la misma aceleración y, por lo tanto, siempre tienen velocidades idénticas. La paradoja surge cuando los cohetes toman velocidades altas y aparece el fenómeno de contracción de Lorentz. ¿Se rompe la cuerda? Dejamos esta segunda paradoja en manos del lector.

Momento

Bajo las transformaciones de Lorentz x^μ es un cuadrivector. Debemos trabajar siempre con cantidades tensoriales y por tanto el momento de una partícula se debe definir como

$$p^\mu = m\, dx^\mu / d\tau \quad (38)$$

donde m es la masa de la partícula y τ el tiempo propio. Recordando (37) se tiene que

$$c\, d\tau = c\, dt(1-(v/c)^2)^{1/2} \quad (39)$$

Entonces

$$\mathbf{p} = m\, d\mathbf{x}/d\tau = m\mathbf{v}/(1-(v/c)^2)^{1/2} \quad (40)$$

La componente 0 del cuadrivector momento es

$$p^0 = m\, dx^0 / d\tau = mc/(1-(v/c)^2)^{1/2} \equiv E/c \quad (41)$$

La energía es pues

$$E = mc^2/(1-(v/c)^2)^{1/2} \tag{42}$$

Desarrollando en potencias de (v/c) se encuentra

$$E = mc^2 + mv^2/2 + 3mv^4/8c^2 + 5mv^6/16c^4 + \cdots = mc^2 + K \tag{43}$$

En este desarrollo el primer término corresponde a la energía correspondiente a la masa en reposo de la partícula; la famosa fórmula de Einstein. El segundo es la energía cinética clásica y los restantes son las correcciones relativistas a la dicha energía y K es la llamada energía cinética relativista.

Algunas relaciones muy útiles son

$$p^\mu = (E/c, \mathbf{p}), \quad p^\mu p_\mu = m^2c^4, \quad E = (m^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2)^{1/2} \tag{44}$$

Notemos que para una partícula de masa nula, como los fotones, la energía viene dada por

$$E = c|\mathbf{p}| \quad \text{si} \quad m = 0 \tag{45}$$

Se puede probar que la homogeneidad del espacio tiempo implica que en los procesos entre partículas elementales el cuadrimomento inicial y final deben ser iguales.

Por ejemplo, consideremos una partícula de masa M que está en reposo que se desintegra en dos partículas de masas m_1 y m_2. Se desea saber cuál es la distribución final de momentos y energías. Si la partícula 1 sale con un momento **p**, entonces la conservación del trimomento implica que la partícula 2 sale con momento –**p**. Por otra parte la conservación de la energía implica

$$Mc^2 = (m_1^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2)^{1/2} + (m_2^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2)^{1/2} \tag{46}$$

de donde se deduce el valor del módulo de **p**, que resulta ser

$$p = (c^2/2M)(M^4 + m_1^4 + m_2^4 - 2M^2m_1^2 - 2M^2m_2^2 - 2m_1^2m_2^2)^{1/2} \tag{47}$$

De (46) se deduce que la desintegración sólo puede tener lugar si $M > m_1 + m_2$. En el caso de un proceso en el que intervengan N partículas se puede probar que la invariancia bajo el grupo de Poincaré deja como únicas cantidades indeterminadas $(3N - 10)$ parámetros, donde 10 es el número de parámetros de dicho grupo. En el ejemplo que hemos analizado tenemos $N = 3$ y por tanto toda la cinemática queda fijada.

La celebérrima ecuación de Einstein, $E = mc^2$, cobró su fama porque, entre otras consecuencias, implicaba la posibilidad de transformar masa en radiación. Un ejemplo claro es la aniquilación de un positrón y un eletrón en dos fotones, $e^+ e^- \to \gamma\,\gamma$. Para leptones lentos colisionando en el centro de masas, cada fotón debe llevarse .511 MeV respectivamente. La masa del electrón se ha transformado en energía cinética de un fotón. Desintegraciones nucleares dan lugares a fotones aun más energéticos, rayos gamma. Las desintegraciones de átomos inestables con liberación de grandes cantidades de energía son ejemplos que traen el triste recuerdo de la bomba atómica. Si bien la cinemática relativista se halla en la base de la posibilidad de crear un arma nuclear, Einstein jamás participó en la investigación asociada a su desarrollo.

Leyes del movimiento

De acuerdo con lo dicho anteriormente debemos de alguna forma modificar las leyes fundamentales de la mecánica Newtoniana [Isaac Newton (Woolsthorpe, Lincolnshire 1642, Londres -1727)]. Por analogía con la segunda ley de Newton la relación entre la fuerza F y el cambio de momento que ésta produce viene dada por

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt = d\left(m\mathbf{v}/(1-(v/c)^2)^{1/2}\right)/dt \tag{48}$$

donde se ha tenido en cuenta la ecuación (38). De aquí se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = &\left[m/(1-(v/c)^2)^{1/2}\right]d\mathbf{v}/dt + \\ &+\left[m/c^2(1-(v/c)^2)^{3/2}\right](\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}/dt)\,\mathbf{v}\end{aligned} \tag{49}$$

Evidentemente esta es la ecuación de la mecánica Newtoniana en el límite $v \ll c$. De (49) se ve que la fuerza **F** y la aceleración $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ no son paralelas como sucede en el límite Newtoniano. Serán paralelas sólo si

$$\begin{aligned}&\mathbf{v} \parallel d\mathbf{v}/dt \quad \text{en cuyo caso} \quad \mathbf{F} = \left[m/(1-(v/c)^2)^{3/2}\right]d\mathbf{v}/dt \\ &\mathbf{v} \perp d\mathbf{v}/dt \quad \text{en cuyo caso} \quad \mathbf{F} = \left[m/(1-(v/c)^2)^{1/2}\right]d\mathbf{v}/dt\end{aligned} \tag{50}$$

Notemos además que en este último caso $\mathbf{v}.d\mathbf{v}/dt = 0$ y por tanto $d\mathbf{v}^2/dt = 0$, lo cual implica que $\mathbf{v}^2$ = constante y $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Para conseguir una formulación covariante de la dinámica relativista es necesario introducir la cuadrifuerza que está relacionada con el cuadrimomento mediante la ecuación

$$f^\mu = dp^\mu/d\tau \tag{51}$$

Puesto que dp^μ es un cuadrivector, también lo es la cuadrifuerza. De aquí se deduce que

$$\mathbf{f} = d\mathbf{p}/d\tau = \left[1/(1-(v/c)^2)^{1/2}\right]d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}/(1-(v/c)^2)^{1/2} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}f^0 = dp^0/d\tau &= \left[1/(1-(v/c)^2)^{1/2}\right]d(E/c)/dt = \\ &= \left[1/c(1-(v/c)^2)^{1/2}\right]d(m^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2)^{1/2}/dt = \\ &= \left[c/(1-(v/c)^2)^{1/2}\right]\left[1/(m^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2)^{1/2}\right]\mathbf{p}\cdot d\mathbf{p}/dt = \\ &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{F}/c(1-(v/c)^2)^{1/2}\end{aligned}$$

La primera de estas ecuaciones no es más que la ecuación (48) dada anteriormente y la segunda corresponde a la bien conocida ecuación del cambio de la energía por efecto de la fuerza aplicada, con los cambios pertinentes debidos a la mecánica relativista.

Veamos cómo encontrar ahora la trayectoria de una partícula de masa m sobre la que actúa una fuerza constante F. La ecuación (48) se integra inmediatamente, obteniendo

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) + \mathbf{F}\,t \tag{53}$$

Supondremos para simplificar que $\mathbf{p}(0) = 0$ y entonces la ecuación anterior se escribe

$$m\mathbf{v}(t)/(1-(v(t)/c)^2)^{1/2} = \mathbf{F}\,\mathbf{t} \tag{54}$$

de donde se obtiene que

$$\mathbf{v}(t) = c\,t\,\mathbf{F}/[t^2F^2 + m^2c^2]^{1/2} \tag{55}$$

y a medida que aumenta t muy la velocidad de la partícula crece pero nunca llega a alcanzar la velocidad de la luz. Una nueva integración da la para la trayectoria la ecuación

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + c\mathbf{F}[t^2F^2 + m^2c^2]^{1/2}/F^2 - mc^2\,\mathbf{F}/F^2 \tag{56}$$

Ecuaciones del campo electromagnético

Las ecuaciones para el campo electromagnético que habrían este artículo se adaptan inmediatamente a una notación relativista. No podía ser de otra forma ya que su estructura fue la responsable de entender el grupo de Poincaré. En notación relativista, el campo electromagnético se describe mediante un tensor antisimétrico de segundo orden con componentes

$$F^{0k} = E_k, \qquad F^{12} = B_3, \qquad F^{23} = B_1, \qquad F^{31} = B_2 \tag{57}$$

Con lo que las dos primeras ecuaciones de Maxwell se escriben

$$\partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\lambda F^{\mu\nu} = 0 \tag{58}$$

y las dos segundas, introduciendo el vector corriente

$$\mathbf{J}_\mu = (c\rho, \mathbf{j}), \tag{59}$$

pueden escribirse de forma compacta como

$$\partial_\lambda F^{\lambda\mu} = (4\pi / c)\, \mathbf{J}^\mu \tag{60}$$

Para una partícula de carga Q en el seno de un campo electromagnético la ecuación covariante equivalente a (51) se escribe

$$dp^\mu / d\tau = (Q/c) F^{\mu\lambda} d\, x_\lambda / d\tau \tag{61}$$

Si se considera un sistema de referencia inercial en el que la partícula se halla en reposo entonces de (61) y (57) se halla:

$$d\mathbf{p} / dt = Q\mathbf{E} \tag{62}$$

Por el contrario si en el sistema inercial la partícula está en movimiento entonces se obtiene

$$d\mathbf{p} / dt = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} / c) \tag{63}$$

que no es más que la fuerza de Lorentz.

Conclusión: postulados

Hemos introducido la Teoría de la Relatividad Especial como la solución al problema de mantener una estructura única tanto para las ecuaciones de la mecánica clásica como para las del electromagnetismo. Esta idea da lugar a ecuaciones covariantes bajo el grupo de Poincaré, modificando pues las ecuaciones de la mecánica Newtoniana. Einstein fue más lejos y destiló qué ideas correspondían a nuevos principios y qué resultados eran deducibles. Para ello elevó a nivel de postulado la independencia de la velocidad de la luz para cualquier sistema de referencia inercial. Un segundo postulado es necesario para establecer la covariancia poincaré de las ecuaciones de la Física bajo cambios de sistemas de referencia inerciales. El resto de los resultados de la Teoría de la Relatividad Especial se sigue de estos dos principios.

Einstein cuidó con esmero todos sus escritos para transmitir la idea de que la Naturaleza nos presenta evidencias experimentales de las cuáles debemos inferir principios. Su forma de pensar halló su culminación en la Teoría de la Relatividad General, donde el principio de covariancia se extiende a sistemas no inerciales para así poder absorber la presencia de un campo gravitatorio. La construcción de un principio de acción invariante bajo difeomorfismos del espacio-tiempo se materializó en la acción de Hilbert-Einstein. Sus posteriores esfuerzos para aumentar el grado de simetría del espacio-tiempo y dar cabida a otras interacciones fracasó. Hoy en día se mantiene la separación entre las teorías de campos que cuantizan correctamente las interacciones fuertes, débiles y electromagnéticas y la Teoría de la Relatividad General. Ésta última no ha logrado ser cuantizada. La construcción de teorías con principios de simetría muy elevados (teoría de cuerdas) se ha mostrado todavía incapaz de reproducir la teoría de bajas energías que rige el mundo en el que vivimos. No obstante, la impronta de Einstein en el sentido de elevar simetrías a postulados está siempre presente en los desarrollos fundamentales más ambiciosos.

P. Pascual, J. I. Latorre
están en el Dpto. d'Estructura i Constituents de la Matèria. Facultat de Física. Univ. de Barcelona