

## Einstein y la Geometría

Luis Álvarez-Gaumé y Miguel A. Vázquez-Mozo

### 1. Introducción

La Geometría fue la primera rama de las Matemáticas en recibir una formulación sistemática hace más de dos mil años. En “Los Elementos” de Euclides, escrito alrededor del año 300 antes de nuestra era y uno de los libros más influyentes en la historia de la Humanidad, se obtienen los principales teoremas de la geometría plana a partir de cinco postulados. Aunque el trabajo de Euclides dominó la Geometría durante siglos, fueron numerosos los matemáticos desde Ptolomeo a Legendre que intentaron demostrar que el quinto y último de los postulados introducidos por Euclides<sup>1</sup> podía o bien deducirse de los otros cuatro postulados euclidianos o reducirse a una proposición más “simple”. Sólo en el siglo XIX los matemáticos Carl Friedrich Gauss, Nikolai Lobachevski y János Bolyai se dieron cuenta, independientemente, de que el famoso quinto postulado no sólo era independiente de los cuatro restantes sino que podía relajarse para dar lugar a geometrías no euclidianas perfectamente autoconsistentes. Estas nuevas geometrías fueron generalizadas poco después por Bernhard Riemann a un número arbitrario de dimensiones, inaugurando así toda una nueva rama de las Matemáticas.

El objetivo de este artículo es mostrar al lector como a través del trabajo de Einstein las geometrías no euclidianas, que en sus orígenes podían parecer exentas de toda relevancia física, se convirtieron en uno de los cimientos sobre los que descansa nuestro conocimiento del Universo y la gravedad. Para ello, en lugar de presentar disquisiciones eruditas sobre los desarrollos que la teoría de la relatividad ha generado e inspirado en el campo de la Geometría del siglo XX (que han sido muchos), nos gustaría discutir de la forma más accesible posible cuales fueron las ideas con las que Einstein convirtió a la geometría no eucladiana en un lenguaje natural para la Física.

### 2. La geometría del espacio-tiempo

La geometría ha influido muy poderosamente el desarrollo de las Ciencias Físicas, no solamente en la antigüedad sino durante todo el proceso que culminó con la creación de la Física como ciencia experimental en el siglo XVII. Esta influencia se manifestó fundamentalmente en el uso de la geometría como herramienta de análisis de los procesos físicos, una de las razones por las cuales el lector contemporáneo encuentra difícil la lectura de libros como los *Principia* newtonianos. Son más raros, sin embargo, los intentos de “geometrizar” la Física, es decir, reducir las leyes físicas a propiedades geométricas del espacio.

Quizás el más célebre intento en este sentido fue el plan de Johannes Kepler de desentrañar el “Misterio del Universo” explicando los tamaños de las órbitas planetarias en términos puramente geométricos. Aunque hoy sabemos que los tamaños de las órbitas en el Sistema Solar tienen los valores que tienen por razones puramente “históricas”, el programa kepleriano dio como resultado las tres leyes del movimiento planetario, uno de los pies del gigante a cuyos hombros Newton fue capaz de atisbar más lejos que nadie antes que él.

Tuvieron que pasar no obstante 300 años desde el intento de Kepler para que la geometrización de la Física viniera de la mano de la teoría de la relatividad einsteiniana. A pesar de la fascinación infantil de Einstein con la geometría [1] no fue él quien dio el primer paso. En su celeberrimo artículo de junio de 1905 [2] la relatividad es presentada de manera física a través de relojes y reglas. Fue el matemático suizo Hermann Minkowski quién en 1908 se dio cuenta de que las transformaciones entre los diferentes sistemas de referencia inerciales se podían entender geométricamente como ciertos cambios de coordenadas en el “espacio-tiempo”, un hiperspacio de cuatro dimensiones en las tres de ellas se identifican con las dimensiones espaciales habituales mientras que la cuarta corresponde al tiempo.

La clave de la geometría no eucliana es el hecho de que en un entorno suficientemente pequeño de cada punto la geometría es muy aproximadamente eucliana. En particular las distancias pueden calcularse directamente utilizando el teorema de Pitágoras. Entre dos puntos cercanos  $P$  y  $Q$  cuya diferencia de coordenadas es  $\Delta x$  y  $\Delta y$ , la distancia viene dada por (ver figura 1)

$$\Delta\ell^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2. \quad (1)$$

De esta forma la geometría local en el plano no euclídeo siempre está dada por la ecuación anterior. Esta idea condujo a la fecunda noción de variedad riemanniana, cuyo desarrollo ha tenido un impacto notable en la historia de las matemáticas.

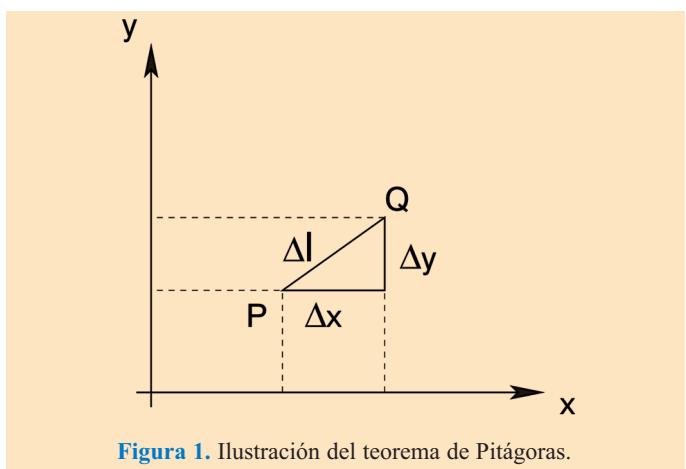


Figura 1. Ilustración del teorema de Pitágoras.

<sup>1</sup>El quinto postulado de Euclides es equivalente al llamado postulado de Playfair que afirma que en el plano, dado una línea recta y un punto externo a ella existe una sola recta paralela a la primera y que pase por dicho punto.

Cuando hablamos aquí de geometrías no euclidianas nos estamos refiriendo en todo momento al espacio. El tiempo en la física clásica, así como en matemáticas, es siempre un espectador inmutable que juega el papel de un parámetro externo. Esto es particularmente obvio cuando consideramos el principio de la relatividad formulado por Galileo y que jugó un papel fundamental tanto en la mecánica de Newton como en su extensión llevada a cabo por Einstein.

El principio de relatividad galileano supone la existencia de un conjunto infinito de sistemas de referencia inerciales (esto es, sistemas de referencia en los que se satisface la ley de inercia) y que necesariamente se mueven unos con respecto a los otros con velocidad constante. Este principio afirma que las leyes de la mecánica toman la misma forma en todos los sistemas inerciales.

El principio de la relatividad de Galileo se puede entender también como un principio de invariancia. El paso de la descripción en un sistema de referencia inercial a otro se realiza a través de ciertas transformaciones que relacionan las coordenadas y el tiempo en ambos sistemas, las llamadas transformaciones de Galileo. El principio de relatividad galileano se enuncia entonces diciendo que las leyes de la mecánica son invariantes en forma frente a dichas transformaciones. En particular, en la relatividad galileana el tiempo no cambia al pasar de un sistema de referencia inercial a otro más allá del cambio producido por una diferente elección en el origen de tiempos: los relojes de dos observadores inerciales no tienen por qué marcar la misma hora, pero sí medirán el mismo intervalo temporal transcurrido entre dos sucesos.

Este es quizás el punto más importante donde la relatividad einsteiniana se separa de y extiende a la galileana. El principio de la relatividad de Einstein se basa en dos postulados fundamentales:

- Todas las leyes de la física toman la misma forma en cualquier sistema de referencia inercial.
- La velocidad de la luz es independiente de la velocidad relativa del observador y la fuente.

Es decir, no sólo las leyes de la mecánica sino todas las leyes de la física, y en particular las del electromagnetismo, tienen que ser invariantes bajo las transformaciones que relacionan coordenadas y tiempo en dos sistemas de referencia inerciales. Además, la velocidad de la luz emitida por una fuente que medirían diferentes observadores inerciales ha de ser siempre la misma (unos  $300.000 \text{ km s}^{-1}$ ).

Si intentamos obtener las transformaciones de coordenadas que relacionan a dos observadores inerciales respetando la constancia de la velocidad de la luz nos encontramos con que el tiempo deja de ser inerte y participa de la cinemática y la dinámica. Esta propiedad de la Teoría Especial de la Relatividad (que la relatividad general lleva a sus últimas consecuencias) obliga a abandonar no solamente la idea de que el espacio y tiempo son estructuras independientes, sino también el que la geometría del continuo espacio-temporal es euclidiana. Esto tuvo consecuencias espectaculares sobre la estructura del universo.

Vamos a analizar con cierto detalle las consecuencias de estos dos postulados. Para simplificar la visualización geométrica consideraremos un mundo en el que nos olvidamos de una de las coordenadas espaciales. Es decir, los puntos de nuestro espacio-tiempo en lugar de venir etiquetados por cuatro coordenadas  $(t, x, y, z)$ , tres espaciales y una temporal, vendrán descritos sólo por tres coordenadas  $(t, x, y)$ . Esta simplificación no presenta ningún problema porque a fin de cuentas lo que queremos ilustrar es como la geometría cambia cuando tenemos en cuenta el tiempo. Así, en los diagramas que aparecerán a continuación la coordenada vertical representará el tiempo y no la distancia espacial al plano  $x-y$ . Asimismo, y ésto requiere un esfuerzo adicional, al hacer los dibujos vamos a medir el tiempo en unidades de longitud. Dado que la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores inerciales podemos utilizar como unidad de tiempo el intervalo temporal necesario para que la luz recorra una determinada distancia, digamos un centímetro. Esta unidad de tiempo es igual a  $(1 \text{ cm}) / (3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}) \approx 3.3 \times 10^{-11} \text{ s}$ , ¡esto es, unas tres cienmilmillonésimas de segundo! Esto no es una complicación gratuita. La razón para utilizar estas unidades de tiempo es que al hacerlo la escala en el eje  $t$  está en relación 1:1 con la escala en los ejes  $x$  e  $y$ . Si hubiéramos mantenido las unidades ordinarias (por ejemplo tiempo en segundos y distancias en centímetros) los diagramas que obtendríamos serían bastante poco ilustrativos<sup>2</sup>.

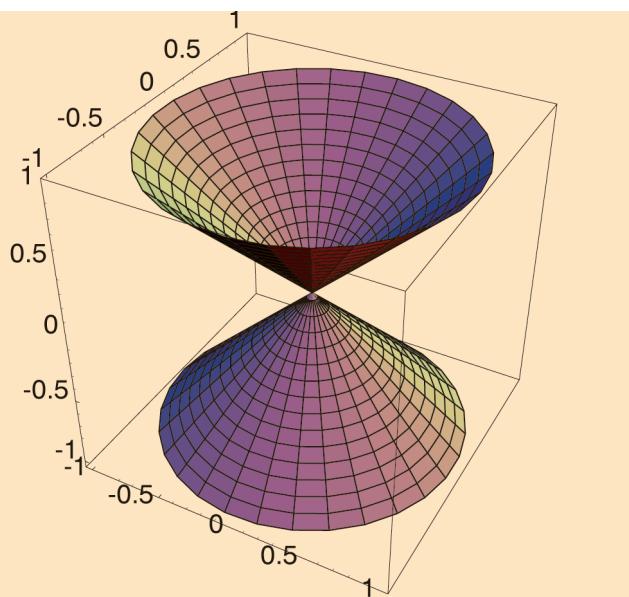
Esta elección de unidad de tiempo es equivalente a escoger un sistema de unidades en que la velocidad de la luz toma el valor  $c = 1$ . A pesar de esto en las fórmulas seguiremos manteniendo la presencia explícita de la velocidad de la luz como  $c$ . Fijadas pues las unidades a utilizar podemos continuar con el estudio de la geometría del espacio-tiempo. Imaginemos que nos encontramos en el centro de nuestro sistema de coordenadas  $x = 0, y = 0$  en el instante  $t = 0$  y encendemos una bombilla. La luz formará un frente de onda circular (esférico, si estuviésemos en un espacio con tres dimensiones espaciales) que se alejará radialmente en todas direcciones a la velocidad de la luz. Transcurrido un tiempo  $t$  desde que hemos encendido la bombilla el radio del frente de ondas será  $ct$  y cualquier punto sobre dicho frente con coordenadas espaciales  $(x, y)$  satisfará la ecuación

$$c^2 t^2 = x^2 + y^2. \quad (2)$$

Esta ecuación la podemos visualizar dibujando la superficie que define en el espacio-tiempo de coordenadas  $(t, x, y)$ , tal y como hemos hecho en la figura 2. La figura geométrica obtenida se conoce como el cono de luz. Nótese que éste tiene dos hojas; en la hoja superior todos los puntos tienen coordenada temporal  $t > 0$  y por lo tanto se encuentran en el futuro del suceso correspondiente a encender la bombilla, que en el espacio de Minkowski corresponde al origen de coordenadas. Por otra parte en la hoja inferior del cono  $t < 0$  y todos los puntos se encuentran en el pasado del origen.

A los puntos del espacio de Minkowski  $(t, x, y, z)$  se les suele denominar “sucesos”, ya que describen un punto de espacio  $(x, y, z)$  en un determinado instante de tiempo  $t$ . Una de las consecuencias de los postulados de la relatividad espe-

<sup>2</sup>Aunque medir tiempos en unidades de longitud pueda parecer extraño a primera vista, estamos sin embargo acostumbrados a medir distancias en unidades de tiempo. Esto es lo que hacemos cuando expresamos las distancias entre galaxias en años-luz.



**Figura 2.** El cono de luz asociado a cualquier punto del espacio de Minkowski utilizando nuestras unidades  $c = 1$ .

cial es que la velocidad de la luz es de hecho la velocidad límite de las señales físicas. Como consecuencia de esto el cono de luz nos permite representar además la estructura causal del espacio-tiempo. En la figura 2 vemos que el cono de luz divide al espacio-tiempo en dos regiones bien definidas: por una parte los puntos dentro del cono y sobre su superficie y por otro lado los puntos exteriores al cono. La clave está en darse cuenta de que los sucesos situados en el exterior del cono de luz no pueden tener relación causal con el suceso situado en el origen de coordenadas. Efectivamente, si quisieramos enviar una señal entre el origen y cualquier punto exterior al cono de luz, dicha señal tendría que propagarse a velocidad mayor que la de la luz. Como consecuencia, el suceso correspondiente al origen no puede influir en ningún suceso futuro ( $t > 0$ ) localizado fuera del cono de luz, e inversamente, ningún suceso con  $t < 0$  fuera de cono de luz puede influenciar causalmente a lo que suceda en el origen.

Por el contrario, los puntos dentro o sobre el cono de luz están en contacto causal con el origen. Esto significa que es posible enviar una señal desde el origen a todos los puntos en el interior de la hoja superior del cono, o que desde cualquier punto dentro de la hoja inferior del cono es posible enviar una señal que alcance el origen. En ambos casos la señal enviada se propaga a velocidad menor o igual que la de la luz. De esta forma podemos decir que todos los puntos dentro o sobre la hoja inferior del cono de luz forman nuestro pasado, en el sentido de que constituyen el conjunto de sucesos que han podido influir el aquí y el ahora, que corresponde al vértice del cono de luz. Por ejemplo, cuando miramos a las estrellas lo que estamos haciendo es ver parte de la superficie pasada (hoja inferior) de nuestro cono de luz, ya que los puntos de éste corresponden a aquellos sucesos desde los cuales es posible enviar una señal luminosa al origen del sistema de coordenadas.

El cambio que esto supone con respecto a la imagen pre-einsteiniana de mundo es radical. Ahora el tiempo no sólo

deja de ser un parámetro espectador para pasar a participar de la cinemática y la dinámica, sino que además cada suceso en el espacio-tiempo tiene asociado su cono de luz local que determina su relación causal con el resto de los sucesos que forman dicho espacio-tiempo.

Al igual que el espacio euclídeo, el espacio de Minkowski viene equipado con su geometría, esto es una forma de medir la distancia entre dos puntos de dicho espacio. Consideremos dos sucesos  $A$  y  $B$  cuya diferencia de coordenadas sea  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  y  $\Delta y$ . La “distancia” espacio-temporal entre ambos sucesos está dada entonces por

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2. \quad (3)$$

A diferencia del espacio euclídeo, la distancia ya no está simplemente dada por el teorema de Pitágoras. Más aún, en el espacio de Minkowski la cantidad  $\Delta s^2$  no tiene porqué ser positiva. Su signo, como veremos a continuación, nos indica la posible relación causal entre ambos sucesos.

Consideremos de nuevo el cono de luz de la figura 2 e identifiquemos el suceso  $A$  con el origen del sistema de coordenadas  $(0, 0, 0)$ . En este caso tenemos tres posibilidades para el valor del intervalo  $\Delta s^2$  entre  $A$  y  $B$ :

- $\Delta s^2 > 0$ . En este caso el suceso  $B$  se encuentra en el interior del cono de luz. Diremos entonces que ambos sucesos están separados por un intervalo temporal.
- $\Delta s^2 = 0$ . De la propia definición del cono de luz vemos que en este caso el suceso  $B$  yace sobre la superficie del cono. Se dice entonces que el intervalo entre los dos sucesos es nulo.
- $\Delta s^2 < 0$ . Ahora el suceso  $B$  se encuentra en el exterior del cono de luz y el intervalo entre los sucesos  $A$  y  $B$  se denomina espacial.

La historia de un sistema viene representada por una curva en el espacio de Minkowski. Las trayectorias que describen los sistemas físicos son curvas llamadas temporales. Esto quiere decir que cada uno de los puntos de la curva se encuentra en el interior de todos los conos de luz con centro en cada punto de la misma curva. Ésta es la forma geométrica de decir que la velocidad de los sistemas físicos no puede exceder la de la luz.

Para ilustrar algunos detalles interesantes de las propiedades del espacio-tiempo, simplificaremos las gráficas aún más ignorando también la coordenada  $y$ . Por lo tanto en muchas de las figuras nuestro espacio tiempo será bidimensional con coordenadas  $(t, x)$  y las trayectorias de los sistemas serán curvas en este plano. La geometría local está dada por la ecuación (3) pero suprimiendo la coordenada  $y$

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2. \quad (4)$$

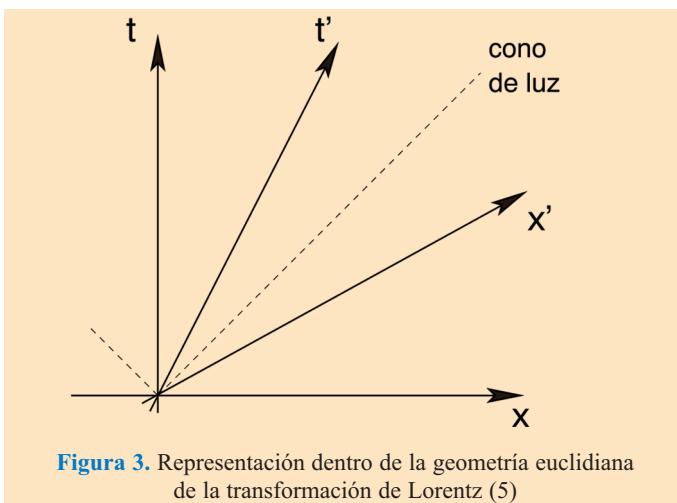
Geométricamente las transformaciones entre dos sistemas de referencia inerciales corresponden a cambios de coordenadas  $(t, x) \rightarrow (t', x')$  que mantienen invariante el intervalo espacio-temporal (4) entre dos sucesos arbitrarios<sup>3</sup>. Estas transformaciones se conocen como transformaciones de Lorentz. Imaginemos que  $(t', x')$  corresponde a las coordenadas de un suceso medidas en un sistema de referencia

<sup>3</sup>El análogo en el espacio euclídeo serían las transformaciones ortogonales que dejan invariante la distancia entre dos puntos cualequiera de dicho espacio.

inercial que se mueve con respecto al sistema  $(t, x)$  con velocidad  $v$  a lo largo del eje  $x$ . No es difícil verificar que las transformaciones

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (5)$$

dejan el intervalo (4) invariante y se reducen a las transformaciones de Galileo cuando la velocidad  $v$  es mucho menor que la de la luz. Si representamos su efecto en un plano euclídeo el resultado es bastante chocante (véase figura 3). Nótese sin embargo que, al dejar invariante el intervalo (4) las transformaciones de Lorentz dejan invariante el cono de luz y la estructura causal del espacio-tiempo.



**Figura 3.** Representación dentro de la geometría eucliana de la transformación de Lorentz (5)

### 3. La paradoja de los gemelos

Una de las paradojas clásicas que se presentan casi siempre en exposiciones elementales de la teoría de la relatividad es la llamada la paradoja de los gemelos. Supongamos dos gemelos idénticos, uno de los cuales inicia un viaje de ida y vuelta con velocidad  $v$  mientras que el otro se queda tranquilamente esperando el regreso de su hermano. En el sistema de referencia del gemelo que espera el reloj de su hermano viajero irá más despacio que el suyo y por lo tanto en el reencuentro será más joven que él. Pero si uno toma el sistema de referencia que viaja con el segundo gemelo, es el primer gemelo el que se mueve con velocidad  $-v$  y por lo tanto cuando vuelvan a verse el hermano que se quedó esperando habrá de ser el más joven. He aquí la paradoja, ya que cuando los dos hermanos vuelvan a verse las dos alternativas son mutuamente excluyentes.

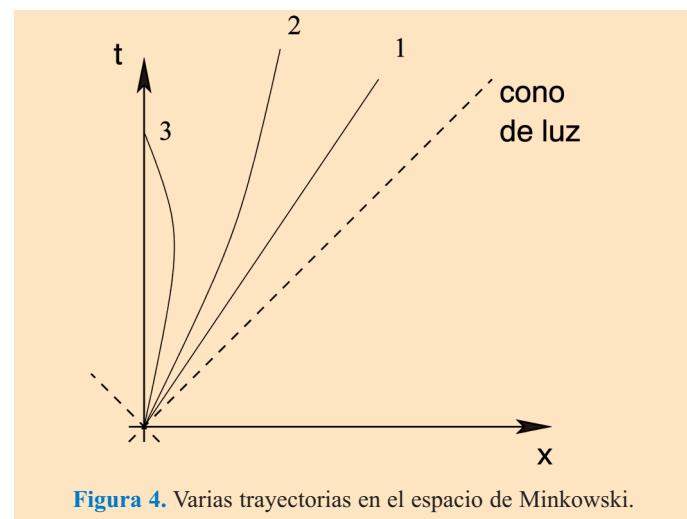
Si pensamos de forma espacio-temporal, veremos que esta paradoja no es tal. Pero antes necesitamos entender un poco mejor el significado de  $\Delta s^2$ . Si en la ecuación (4) en lugar del signo negativo los dos términos en el miembro de la derecha tuviesen un signo positivo podríamos interpretar  $\Delta s$  como una distancia. Pero si  $\Delta s^2$  no tiene un signo definido ¿cuál es entonces la interpretación del intervalo? En el caso en que  $\Delta s^2 > 0$  el intervalo admite una interpretación física muy interesante. En este caso podemos considerar un observador inercial que se mueve con respecto a nuestro sistema de referencia y cuya trayectoria en el espacio de Minkowski pasa por los sucesos  $A$  y  $B$ . Para este observador ambos sucesos ocurren en el origen de su sistema de referencia ( $\Delta x = 0$ ) pero separados por un intervalo de tiempo  $\Delta t$ .

Dado que el intervalo  $\Delta s^2$  entre los dos sucesos es el mismo para todos los observadores inerciales tenemos que

$$\Delta t^2 = \frac{\Delta s^2}{c^2}. \quad (6)$$

En este caso el intervalo entre los dos sucesos  $A$  y  $B$  está directamente relacionado con el tiempo propio de un observador para el que ambos sucesos ocurren en el mismo punto del espacio (su origen de coordenadas, por ejemplo).

De hecho el concepto de tiempo propio de un observador en movimiento con respecto a un sistema de referencia puede generalizarse al caso en que dicho observador se mueve con velocidad variable. Como hemos comentado más arriba, los sistemas físicos se representan en el espacio de Minkowski como curvas temporales. En la figura 4 se muestran algunos ejemplos de dichas curvas en el plano  $x - t$ . Por ejemplo, la curva correspondiente a un observador en reposo situado en  $x = 0$  simplemente coincide con el eje temporal. Por otra parte si el observador se mueve con velocidad uniforme con respecto al sistema de referencia su trayectoria en el espacio de Minkowski será un recta como la línea 1. La curva 2 corresponde a un observador que se mueve con velocidad variable, mientras que en el caso de la curva 3 tendremos un observador cuyo viaje empieza y termina en el origen, donde se encontrará de nuevo con el observador en reposo.

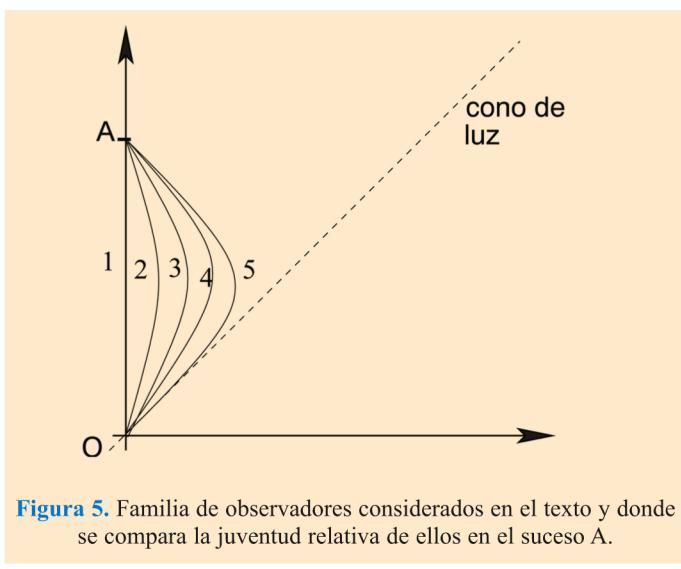


**Figura 4.** Varias trayectorias en el espacio de Minkowski.

Para los observadores inerciales sabemos que el tiempo propio transcurrido entre dos sucesos se relaciona con el intervalo espacio-temporal entre ambos por la fórmula (6). Esta relación entre tiempo propio y “distancia” espacio-temporal puede extenderse fácilmente al caso de observadores no inerciales. Consideraremos de nuevo la trayectoria 2 en la figura 4. Siempre podemos “rectificar” dicha curva con precisión arbitraria por una línea poligonal de forma que en cada segmento de dicha curva la relación (6) entre el tiempo propio y el intervalo entre los extremos del segmento es aplicable. Sumando los distintos valores de  $\Delta t$  en cada segmento (esto es, haciendo la integral sobre  $\tau$  a lo largo de la trayectoria) obtenemos el tiempo que marcará el reloj que acompaña al observador en su recorrido. Por lo tanto para un observador arbitrario su tiempo propio estará dado por (6), dónde ahora  $\Delta s$  es la “longitud” de la trayectoria de dicho observador en

el espacio de Minkowski. Es importante notar que en este análisis es crucial el que la curva sea temporal, ya que esto garantiza que  $\Delta s$  en cada segmento es una cantidad real.

Sabiendo esto podemos intentar clarificar la paradoja de los gemelos. Imaginemos un grupo de gemelos que comienzan su viaje de ida y vuelta en  $x=0$  con diferentes velocidades (véase la figura 5), mientras que uno de ellos (el observador 1) se queda en  $x=0$  viendo pasar el tiempo. Dado que las trayectorias espacio-temporales de los diferentes observadores tendrán diferentes longitudes nos podemos preguntar cuál de los gemelos será el más joven cuando vuelvan a encontrarse en  $A$ . Si nos dejásemos llevar por nuestra intuición euclídea y concluyésemos que la trayectoria 5 es la de mayor longitud, llegaríamos a la conclusión errónea de que el observador 5 sería el más viejo al llegar a  $A$ . Sin embargo, precisamente debido al signo menos en la fórmula (4), la trayectoria 5 es la de menor longitud espacio-temporal y por lo tanto será para este observador para el que el viaje haya durado menos. Una manera intuitiva de comprobar este hecho sin hacer ningún cálculo es darse cuenta de que esta trayectoria es la más cercana al cono de luz y que los puntos sobre este satisfacen  $\Delta s^2 = 0$ . Por lo tanto en la fiesta de reencuentro que los gemelos organizarán en  $A$  el gemelo 1 será más viejo que el gemelo 2, éste a su vez será más viejo que el gemelo 3 y así sucesivamente, siendo el gemelo 5 el más joven de todos.



**Figura 5.** Familia de observadores considerados en el texto y donde se compara la juventud relativa de ellos en el suceso A.

De nuestro análisis anterior se sigue que el gemelo que viaja será siempre más joven que el que se quedó en reposo en un sistema de referencia inercial. Lo que elimina la paradoja es que el sistema de referencia del gemelo que viaja no es un sistema inercial y por lo tanto no podremos aplicar las fórmulas de la relatividad especial para concluir que respecto de dicho sistema de referencia el reloj del gemelo “inercial” va más despacio.

Finalmente, como corolario a la figura 5, nos gustaría señalar que según la Teoría Especial de la Relatividad cuando buscamos la trayectoria de una partícula libre entre un suceso inicial y otro final, la dinámica selecciona aquella que, pasando por los dos sucesos, corresponde a un tiempo propio mayor.

#### 4. La relatividad general

En su artículo de 1905 [2]. Einstein hizo compatibles la mecánica y el electromagnetismo en beneficio de éste último: las ecuaciones de Maxwell toman la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales y la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores, proporcionando además la velocidad máxima para la transmisión de información o interacciones. Cada suceso está equipado con su cono de luz y (4) define la nueva geometría local.

Haciendo un inciso, es francamente curioso que la geometrización de la relatividad especial llevada a cabo por Minkowski no fue del agrado de Einstein que la tildó de “erudición innecesaria” [3]. Sin embargo, como él mismo tuvo que admitir más adelante, la formulación minkowskiana parecía la más adecuada para asaltar el problema que el propio Einstein se había propuesto poco tiempo después de formular la Teoría Especial de la Relatividad: la formulación de una teoría relativista de la gravitación. Este era el paso lógico después de que la relatividad especial hubiese establecido la armonía entre la mecánica y la electrodinámica.

Al igual que con la Teoría Especial de la Relatividad, el camino de Einstein hacia la formulación de la relatividad general se inicia, en 1907, con un experimento imaginario: para el infortunado individuo que cae desde lo alto del tejado de una casa el campo gravitatorio deja de existir mientras dura su caída. Durante ese tiempo el observador experimentará la misma sensación que tendría si se encontrara en ingavidez. Esta “simple” observación, que Einstein calificó como “la ocurrencia más afortunada de mi vida”, constituye el llamado principio de equivalencia y resultó ser la piedra angular sobre la que se construyó todo el edificio de la Teoría General de la Relatividad.

Para entender el principio de equivalencia un poco mejor vamos a considerar un ejemplo familiar. Todos estamos ya acostumbrados a ver las imágenes de astronautas en estaciones espaciales que orbitan alrededor de la Tierra y en las que estos flotan como si se encontraran en ausencia de gravedad. Sin embargo un sencillo cálculo muestra que la aceleración de la gravedad terrestre en una estación espacial que se encuentra a una altura de, por ejemplo,  $h = 400$  kilómetros sobre la superficie de la Tierra no es ni mucho menos despreciable:

$$g = 9,8 \left( 1 + \frac{h}{R_{\oplus}} \right)^{-2} \text{ m s}^{-2} \approx 8,7 \text{ m s}^{-2}.$$

Por lo tanto la aceleración de la gravedad allá arriba es sólo ligeramente más pequeña que la que experimentamos sobre la superficie de la Tierra. ¿Cómo podemos explicar entonces que los astronautas parezcan no sentir ningún tipo de atracción gravitacional? Lo que realmente ocurre es que tanto los astronautas como el equipo y la propia nave al orbitar están en caída libre hacia la Tierra y por lo tanto de acuerdo con el principio de equivalencia es como si no sintiesen el campo gravitatorio.

Igualmente un astronauta en una nave espacial localizada muy lejos de cualquier cuerpo celeste y que por lo tanto se encuentra en estado de ingavidez puede simular el campo gravitatorio terrestre usando el principio de equivalencia. Si este astronauta enciende los cohetes de su nave de forma que ésta adquiera una aceleración igual a  $9,8 \text{ m s}^{-2}$  los tripulan-

tes de dicha nave experimentarán una fuerza en dirección contraria que dará lugar a una aceleración en todos los cuerpos igual a  $9.8 \text{ m s}^{-2}$  independientemente de su masa.

El principio de equivalencia supuso para Einstein el inicio del largo y tortuoso camino que tras ocho años y más de un fracaso le condujo a la descripción del campo gravitatorio como un efecto de la geometría del espacio-tiempo. Como hemos indicado más arriba, todos los observadores inerciales observan la misma métrica del espacio-tiempo. Esto no es cierto sin embargo para observadores no inerciales (acelerados) para los cuales la métrica vendrá dada por una forma cuadrática general. El principio de equivalencia nos dice que, localmente, podemos eliminar un campo gravitatorio simplemente dejandonos caer con él o crearlo acelerando nuestro sistema de referencia inercial.

Ya hemos mencionado que en la geometría riemanniana el teorema de Pitágoras gobierna la geometría local. En un entorno suficientemente pequeño de un punto dado la geometría euclíadiana puede aplicarse con un alto grado de precisión. Este hecho nos da la pista para concretar el principio de equivalencia en términos geométricos. Lo que la observación del individuo que cae del tejado nos está diciendo es que en presencia de la gravedad existen sistemas de referencia en los que la geometría del espacio-tiempo es localmente la de Minkowski. Así elementos como el cono de luz y la estructura causal que hemos discutido más arriba siguen formando parte fundamental de la descripción de la naturaleza cuando tenemos en cuenta el efecto de los campos gravitatorios.

La imagen del mundo que surge de la Teoría General de la Relatividad es la de un espacio-tiempo riemanniano donde localmente la geometría es Minkowskiana. Junto a esto, los sistemas de referencia inerciales dejan de tener el papel fundamental que jugaban en la relatividad especial; como nos enseña el principio de equivalencia el efecto de la gravedad es localmente equivalente al de las fuerzas de inercia que aparecen en sistemas de referencia no inerciales y por lo tanto estos han de considerarse al mismo nivel que los sistemas de referencia inerciales. Como consecuencia, la métrica del espacio-tiempo no tendrá en general la forma tan simple que habíamos usado en la ecuación (3). Ahora el intervalo entre dos sucesos próximos vendrá determinado por diez coeficientes que constituyen el llamado tensor métrico

$$\Delta s^2 = \sum_{i,j=0}^3 g_{ij} \Delta x^i \Delta x^j. \quad (7)$$

Aquí hemos etiquetado las coordenadas espacio-temporales como  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  y los diez coeficientes independientes  $g_{ij}$  ( $g_{ij} = g_{ji}$ ) son en general función de las coordenadas. Lo importante es que localmente siempre existe un sistema de referencia con coordenadas  $(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$  tales que en dicho sistema  $\Delta s^2$  toma la forma

$$\Delta s^2 = (\Delta x'^0)^2 - (\Delta x'^1)^2 - (\Delta x'^2)^2 - (\Delta x'^3)^2. \quad (8)$$

Ésta es la expresión matemática del principio de equivalencia. A pesar de la mayor complejidad matemática del intervalo (7) su interpretación física sin embargo es completamente análoga al caso minkowskiano. Al igual que en la ecuación (6)  $\Delta t = \Delta s/c$  define localmente el tiempo propio de un observador en movimiento arbitrario. Asimismo cada suceso

tiene su cono de luz asociado, que una vez más se define como el lugar geométrico de los sucesos para los que  $\Delta s^2 = 0$ . Es decir, el cono de luz está definido otra vez por las trayectorias de propagación libre de los rayos de luz. Las trayectorias de las partículas se obtienen maximizando el tiempo propio, al igual que en el espacio de Minkowski. Las curvas que unen dos sucesos y a lo largo de las cuales el tiempo propio es máximo se conocen como geodésicas. Por lo tanto, en presencia de un campo gravitacional, las partículas describirán geodésicas en un cierto espacio-tiempo curvado cuya geometría está descrita por (7).

Este argumento heurístico nos da la pista sobre cómo describir el campo gravitacional en términos geométricos. Sin embargo no nos dice nada sobre la dinámica del campo gravitacional, esto es, sobre cómo la distribución de materia determina la gravedad. Éste fue de hecho el gran problema al que tuvo que enfrentarse Einstein durante los años que duró la elaboración de la Teoría General de la Relatividad y que absorbió la mayor parte de su actividad llevándole casi hasta la extenuación física.

No vamos a entrar aquí a explicar en detalle las ecuaciones de la relatividad general. Pero dada su belleza no podemos resistirnos a escribir las ecuaciones de Einstein del campo gravitatorio [4]

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^3} T_{ij}. \quad (9)$$

El miembro de la izquierda de esta ecuación contiene únicamente cantidades asociadas con la geometría del espacio tiempo:  $R_{ij}$  es el llamado tensor de Ricci que se expresa en términos de la métrica y sus derivadas segundas y  $R$  es el escalar de curvatura, definido como la traza del tensor de Ricci

$$R = \sum_{i,j=0}^3 g^{ij} R_{ij}. \quad (10)$$

Por otra parte el miembro de la derecha de (9) contiene la información sobre la distribución de materia-energía del espacio tiempo, codificada en el tensor de energía-momento  $T_{ij}$ . Vemos por lo tanto que, moralmente, las ecuaciones de Einstein las podemos escribir como

$$\text{Geometría} = \text{Materia}$$

Es decir, la presencia de materia tiene como resultado la curvatura de espacio-tiempo, algo que nosotros observamos en forma de campos gravitatorios. Además, la teoría de Newton de la gravitación se obtiene entonces de las ecuaciones de Einstein en el límite de bajas velocidades y pequeñas concentraciones de masa.

## 5. Agujeros negros

Desgraciadamente no nos es posible analizar en detalle todas y cada una de las fascinantes predicciones de la relatividad general, muchas de las cuales ha sido comprobadas observacionalmente con precisiones asombrosas. Aquí mencionaremos las que son quizás las más conocidas: la existencia de agujeros negros y la expansión del Universo.

Uno de los resultados más profundos de la relatividad general es que en cierto sentido la teoría conoce sus límites. Bajo ciertas condiciones muy generales la materia colapsa

sin límite hasta formar una singularidad en el espacio-tiempo. El ejemplo más típico de este fenómeno es de una estrella muy masiva (cuya masa, digamos, es muchas veces la del Sol) que colapsa bajo la influencia de su propia gravedad<sup>4</sup>. En lugar de presentar un análisis detallado de este proceso en términos matemáticos vamos a intentar entender los aspectos esenciales de la formación de un agujero negro con la ayuda de la figura 6. En este dibujo también puede verse la orientación de los conos de luz en cada punto. Recorremos que como las propiedades geométricas del espacio-tiempo en torno a la estrella varía de un punto a otro lo mismo ocurre con la estructura de conos de luz. En particular estos apuntan en diferentes direcciones en cada punto, a diferencia de lo que ocurre en el espacio de Minkowski donde todos los conos de luz son paralelos.

Imaginemos que inicialmente nos encontramos en el extremo inferior de la figura sobre la superficie de la estrella. A medida que ésta colapsa los ejes de los conos de luz sobre los puntos en la superficie de la estrella se van inclinando más y más hacia el interior de la estrella. De hecho llega un momento en que los rayos de luz emitidos desde la superficie de la estrella no pueden escapar a regiones lejanas. Este fenómeno corresponde a la formación del llamado horizonte de sucesos, y tiene lugar cuando el radio de la estrella colapsante decrece por debajo del radio de Schwarzschild<sup>5</sup>

$$R_h = \frac{2GM}{c^2}, \quad (11)$$

dónde  $M$  es la masa de la estrella. En la figura 6 el horizonte de sucesos corresponde a la superficie cilíndrica de radio  $R_h$ . Como vemos, los conos de luz sobre el horizonte son tangentes esta superficie y apuntan hacia el interior de ella. Como consecuencia ninguna señal emitida sobre o dentro del

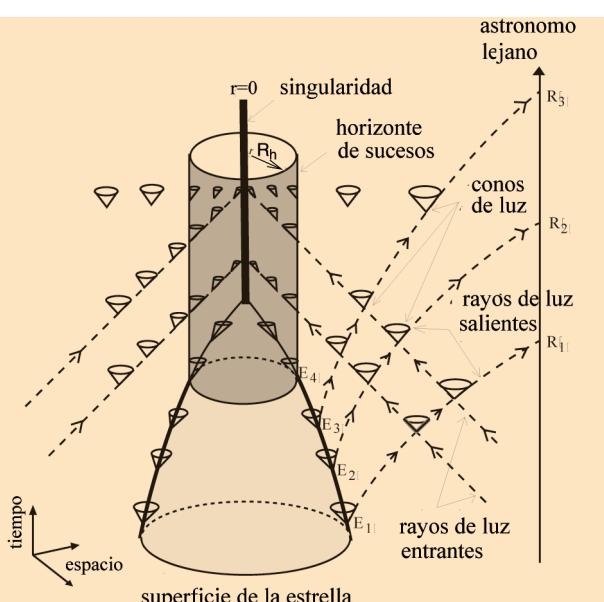
horizonte podrá alcanzar al astronauta que observa el colapso desde la lejanía.

Una vez formado el horizonte la estrella seguirá su proceso de colapso hasta que en un tiempo finito, medido por el observador sobre su superficie, toda la masa de ésta se centre en el punto  $r = 0$  formando una singularidad en el espacio-tiempo dónde la curvatura tiende a infinito. Dado que ninguna señal puede abandonar el horizonte, esta singularidad no será observable desde el exterior del agujero negro y la física fuera del horizonte está completamente desacoplada de lo que ocurre en el interior. Para un observador externo el agujero negro es, clásicamente, una superficie esférica completamente negra de radio  $R_h$  que se traga todo aquello que la atraviesa<sup>6</sup>. Es interesante que en el caso que hemos discutido la presencia del horizonte nos protege de la pérdida de predictibilidad que supondría la existencia de una singularidad “desnuda”. En los años setenta Roger Penrose formuló la conjectura conocida como “censura cósmica”. Segun ella, todo colapso gravitatorio realista debería siempre producir un horizonte que separe a los observadores asintóticos de la singularidad. Hasta ahora, sin embargo, no se ha dado ninguna demostración de esta conjectura e incluso hay dudas sobre su validez general.

Para mejor comprender la deformación que sobre el espacio-tiempo produce una estrella que colapsa vamos a comparar el tiempo propio de un astronauta incauto que se encuentra sobre la superficie de la estrella con el tiempo que marca el reloj de otro astronauta, más precavido, que observa el colapso desde lejos. Supongamos que el astronauta desde la superficie de la estrella nos envía un saludo. La figura 7 nos muestra la sucesión de acontecimientos tanto para el astronauta que cae como para su compañero que le observa desde lejos.

Al principio del colapso los tiempos propios de ambos astronautas son casi iguales, como puede verse del hecho de que los primeros fotogramas en las dos películas de la figura 7 son prácticamente idénticos. Esto cambia, sin embargo, cuando el radio de la estrella en colapso se acerca a  $R_h$ . Como podemos ver en los sucesos  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  de la figura 6, al acercarnos al horizonte de sucesos los conos de luz se inclinan hacia el interior de éste, lo que hace que los rayos de luz emitidos por el infeliz astronauta tarden cada vez más en llegar a su compañero. Además de tardar más en llegar a su destino, las señales luminosas enviadas desde la superficie de la estrella pierde gran parte de su energía para poder escapar del pozo de potencial gravitacional en el que cae el astronauta, es decir, presentarán un desplazamiento hacia el rojo al ser recibidas. Esto significa que la longitud de onda de la señal que recibe el astronauta lejano será mucho mayor que la que tenía dicha señal al ser emitida sobre la superficie de la estrella.

Finalmente, cuando el astronauta atraviesa el horizonte (el suceso  $E_4$  en la figura 6) su cono de luz se encontrará dentro del horizonte por lo que le será imposible cualquier comunicación con el exterior del agujero negro. Sin embar-

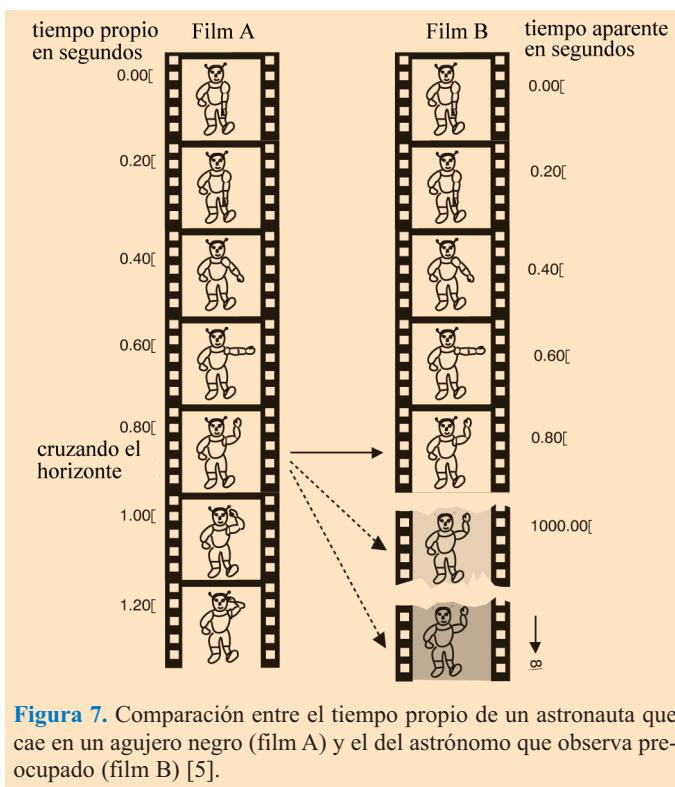


**Figura 6.** Estructura causal en el espacio-tiempo alrededor de una estrella que colapsa [5].

<sup>4</sup>Un problema físico muy interesante es el estudio de los estadios finales de la vida de una estrella y sus diferentes destinos dependiendo de su masa: enanas blancas, estrellas de neutrones o agujeros negros.

<sup>5</sup>Para hacernos una idea del tamaño de este radio baste decir que para un objeto con la masa de la Tierra,  $R_h$  sería aproximadamente igual a 9 milímetros.

<sup>6</sup>De hecho, como demostró Stephen Hawking en 1975, debido a los efectos cuánticos la superficie del agujero negro no es completamente negra, sino que emite radiación térmica con temperatura  $T_h = \hbar c/(4\pi k_B R_h)$ , donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann.



**Figura 7.** Comparación entre el tiempo propio de un astronauta que cae en un agujero negro (film A) y el del astrónomo que observa preocupado (film B) [5].

go el astronauta que observa todo desde lejos no dejará nunca de ver a su compañero. A medida que éste se acerca al horizonte la imagen del intrépido astronauta se irá ralentizando hasta que finalmente quedará sólo una “imagen fija” que se irá haciendo más y más roja y débil hasta acabar por desvanecerse en un tiempo infinito. Para el astronauta que cae, sin embargo, nada especial ocurre cuando atraviesa el horizonte, tal y como podemos ver en la figura 6. Ignorante de su destino, él seguirá saludando a su colega hasta que al cabo de un tiempo finito será destruido en la singularidad.

## 6. Cosmología

Poco después de formular la Teoría General de la Relatividad en 1915 Einstein intentó su aplicación al estudio del Universo en su conjunto. Para ello introdujo lo que hoy conocemos como el Principio Cosmológico, según el cual ningún observador en el Universo ocupa una posición privilegiada de forma que las propiedades geométricas del Universo deben de ser independientes del punto. En general la Teoría General de la Relatividad junto con el Principio Cosmológico conduce a un universo dinámico. Sin embargo, cuando Einstein publicó en 1917 el que puede considerarse como el artículo fundacional de la cosmología relativista [6] no había evidencia alguna de que el Universo se estuviese expandiendo. Por ello Einstein modificó las ecuaciones de la relatividad general añadiendo un término adicional  $\Lambda g_{ij}$  en el miembro de la izquierda de (9). Asumiendo que las secciones espaciales del Universo eran esferas de tres dimensiones, existía un valor de  $\Lambda$  para la cual el Universo era estático.

En 1929 Edwin Hubble obtuvo la primera evidencia observational de la expansión del Universo mediante la

observación del desplazamiento hacia el rojo de las galaxias lejanas, que mostraba que éstas se alejaban de nosotros en todas las direcciones con velocidades de recesión proporcionales a su distancia (ley de Hubble). Esto supuso el abandono del modelo estático de Einstein, así como de la constante cosmológica, cuya introducción el propio Einstein calificó como “el mayor error de mi vida”<sup>7</sup>.

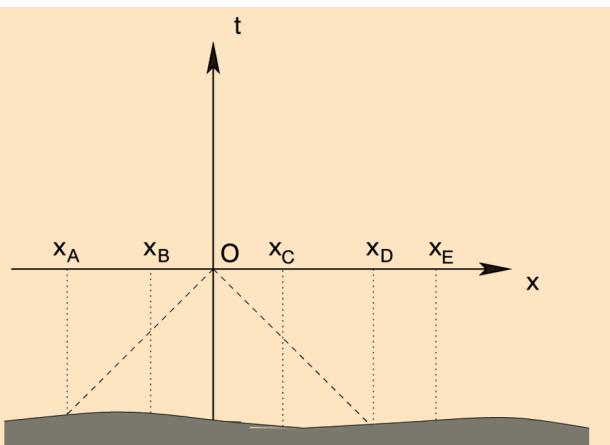
Soluciones no estáticas compatibles con el Principio Cosmológico fueron obtenidas por Willem de Sitter, Alexander Friedmann, Georges Lemaître, Howard Robertson y Arthur Walker en los años siguientes a la formulación de la relatividad general. En particular el llamado modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker describe un universo en expansión en el que las galaxias lejanas satisfacen la ley de Hubble. Una de las predicciones más importante de este modelo es que en el pasado el Universo fue mucho más denso y más caliente de lo que es en la actualidad, hasta llegar a un instante en el que la densidad de energía y la curvatura del espacio-tiempo divergen. Esta singularidad inicial, en la cual la teoría pierde toda predictibilidad, es el llamado *Big-Bang*. Vemos que, al igual que ocurre en el proceso de colapso gravitatorio de una estrella supermasiva, la relatividad general predice la existencia de singularidades en las que la propia teoría deja de ser válida. Éste es un nuevo ejemplo de algo que ya hemos mencionado más arriba: la Teoría General de la Relatividad nos proporciona sus propios límites. En los años sesenta Roger Penrose y Stephen Hawking demostraron rigurosamente que, bajo condiciones muy generales, la singularidad inicial es inescapable en la cosmología relativista.

La cosmología de Big-Bang ha recibido muchas e importantes comprobaciones experimentales por lo que hoy se habla de ella como del modelo cosmológico estándar. Quizás la más espectacular ha sido el descubrimiento en 1964 de la radiación de fondo de microondas por Arno Penzias and Robert Wilson, una predicción inequívoca del modelo de Big-Bang. Esta radiación es una reliquia de los tiempos inmediatamente posteriores al Big-Bang en los que el Universo era más denso y más caliente.

En cosmología, al igual que vimos al estudiar la formación de un agujero negro, la geometría del espacio-tiempo condiciona la estructura causal del mismo. En términos generales sabemos que al observar el Universo estamos de hecho explorando la superficie pasada de nuestro cono de luz. En un espacio-tiempo eterno, como es el espacio de Minkowski, este cono de luz se extiende indefinidamente en el pasado por lo que, en principio, tenemos la posibilidad de recibir señales luminosas emitidas desde regiones arbitrariamente alejadas de nuestra posición. Esto sin embargo no es posible en un universo como el nuestro que se originó en algún instante de tiempo en el pasado. La existencia del Big-Bang implica que el Universo sólo ha existido durante un tiempo finito en el pasado y como consecuencia la luz procedente de regiones suficientemente lejanas de nosotros no habrá tenido tiempo de alcanzarnos desde que el Universo comenzó a existir.

Este fenómeno aparece ilustrado en la figura 8 usando el espacio-tiempo bidimensional que introdujimos más arriba.

<sup>7</sup>Recientes observaciones cosmológicas muestran, no obstante, una aceleración en la expansión del Universo que puede atribuirse a un valor no nulo de la constante cosmológica.



**Figura 8.** Ilustración de la existencia de horizontes de partículas.  
Ningún suceso con  $x < x_A$  o  $x > x_E$  será observables desde  $O$ .

Vemos que debido a la extensión finita en el pasado del cono de luz, en  $O$  sólo podremos recibir señales procedentes de puntos con coordenadas  $x_A < x < x_D$ . Por lo tanto cualquier suceso pasado que haya tenido lugar más allá de esta región (digamos, por ejemplo, en un punto con coordenada espacial  $x_E$ ) no será accesible desde  $O$ . Esto define lo que se conoce como un horizonte de partículas. Su existencia implica que aun cuando pudieramos construir instrumentos de observación infinitamente precisos nuestras posibilidades de observar el Universo están limitadas a una región finita alrededor de nuestra posición. La distancia al horizonte es aproximadamente igual a la distancia que la luz ha tenido tiempo de recorrer desde el Big-Bang, esto es  $cT$ , donde  $T \approx 10^{10}$  años es la edad del Universo. Vemos por lo tanto que la distancia al horizonte, es decir la región accesible a la observación, aumenta con el tiempo. Por lo tanto si, como todo parece indicar, la expansión del Universo es eterna las regiones arbitrariamente alejadas de nosotros acabarán siendo visibles en el futuro.

## 7. Conclusiones

En este breve ensayo hemos intentado transmitir las ideas básicas que constituyen la imagen relativista del mundo y como el trabajo de Einstein revolucionó nuestra concepción del Universo en su conjunto. Con la relatividad especial aprendimos que el espacio y el tiempo absolutos de la física newtoniana han de ser reemplazados por el espacio-tiempo, y que las leyes de la física han de ser compatibles con su estructura geométrica. Por otra parte la Teoría General de la Relatividad nos ha mostrado que el espacio-tiempo no es un simple espectador dónde los sucesos tienen lugar sino que él mismo y su geometría son objetos de la dinámica.

Para el propio Einstein la formulación de la relatividad general no fue más que el principio de la búsqueda de una teoría unificada de la gravitación y el electromagnetismo. En este empeño su principal herramienta fue de nuevo la geometría riemanniana y sus generalizaciones. A pesar de que por diversas razones la empresa de construir tal teoría unificada estaba condenada al fracaso su espíritu ha sobrevivido. Hoy en día una parte importante de la comunidad científica considera que la última frontera de la física teórica se encuentra precisamente en la consecución de una descripción unificada de todas las interacciones incluyendo la gravedad. Esto muy probablemente implica la construcción de una teoría cuántica de la gravedad cuyas propiedades hoy sólo podemos atisbar.

Quizás la mayor dificultad de esta síntesis final radique en que, como hemos visto, la geometría del espacio-tiempo es juez y parte: no sólo nos proporciona el sustrato sobre el que la física tiene lugar, sino que al mismo tiempo participa en ella con su propia dinámica. En la teoría final el espacio-tiempo deberá quizás de dejar de ser un concepto apriorístico para convertirse en un concepto emergente o derivado, igual que las partículas lo son en una teoría cuántica de campos. Una cumbre difícil de alcanzar, sin duda, pero cuya culminación se contará entre los más grandes logros de la mente humana.

## Bibliografía

- [1] ALBERT EINSTEIN, *Autobiographisches*, publicado en: “Albert Einstein, Philosopher-Scientist”, editado por Paul A. Schilpp. Library of Living Philosophers vol. VII, 1949.
- [2] ALBERT EINSTEIN, “Zur Elektrodynamik Bewegter Körper”, *Annalen der Physik* **17** (1905) 891
- [3] ABRAHAM PAIS, *Subtle is the Lord...*, Oxford 1982.
- [4] ALBERT EINSTEIN, “Die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie”, *Annalen der Physik* **49** (1916) 769.
- [5] Las figuras 6 y 7 están adaptadas del excelente artículo de J.-P. Luminet *Black Holes: A General Introduction*, publicado en “Black Holes: Theory and Observation”, editado por F. Hehl, C. Kiefer, R. Metzler, Springer Verlag, 1998 (disponible en: <http://arXiv.org/abs/astro-ph/9801252>).
- [6] ALBERT EINSTEIN, “Kosmologische Betrachtungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie”, *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften* **6** (1917) 142.

Luis Álvarez-Gaumé

está en Theory Division. CERN, Suiza

Miguel A. Vázquez-Mozo

está en el Área de Física Teórica.

Universidad de Salamanca