

## Información, entrelazamiento y relatividad

Ramón Muñoz-Tapia y Rolf Tarrach

### 1. Introducción

La física cuántica y la relatividad especial nacieron a principios del siglo pasado, en 1900 de la mano de Max Planck la primera y en 1905 de la mano de Albert Einstein la segunda, para dar respuesta a fenómenos inexplicables en el marco de la física clásica. El mismo Einstein sentó en 1905 las bases de lo que sería uno de los conceptos más sutiles y fructíferos de la física del siglo XX: el fotón o partícula de luz. En 1948, en los laboratorios Bell de la compañía de teléfonos de los EEUU, se desarrolló la teoría de la información y de la comunicación. ésta también fue la creación de una sola persona: el matemático e ingeniero Claude Shannon [1].

La interfertilización de estas tres teorías es el tema de este artículo que expondremos intentando seguir una máxima de Einstein: las explicaciones deben ser tan sencillas como sea posible, pero no más sencillas.

Con el paso del tiempo se entendió que la descripción cuántica de los estados en que se encuentran los sistemas físicos es la forma matemáticamente más compacta de resumir la información que tenemos sobre ellos. Como dijo Rudolf Peierls, “In my view the most fundamental statement of quantum mechanics is that the wave function or, more generally the density matrix, represents our *knowledge* of the system we are trying to describe” [2]. La medida cuántica produce, al aumentar o actualizar nuestro conocimiento, una modificación instantánea de esta descripción cuántica del estado: el llamado colapso de la función de onda. Como las funciones de onda son extensas, su modificación instantánea podría hacer pensar que la información que contienen se propaga instantáneamente, ya que la función de onda post-medida puede ser no nula donde antes de la medida lo era. El problema se agudizó cuando a partir del trabajo conocido como la paradoja de Einstein, Podolsky y Rosen (EPR) de 1935 [3] se comprendió que las correlaciones cuánticas o entrelazamiento, descritas magistralmente ese mismo año por Erwin Schrödinger [4], permitían modificar instantáneamente y a distancia el estado de un sistema físico con sólo medir sobre otro sistema físico entrelazado con el primero.

La teoría especial de la relatividad consagró la velocidad de la luz en el vacío,  $c \approx 300.000$  km/s, que también es la de todas las ondas electromagnéticas, como una velocidad límite para las partículas materiales y por tanto como la máxima velocidad con la que se puede propagar la energía. Más tarde, y como le gustaba insistir a Rolf Landauer (“information is physical”) [5], se entendió que la información siempre se propaga sobre un soporte energético y que por lo tanto tampoco puede hacerlo a velocidad superior a  $c$ .

Parece pues haber una contradicción entre la acción a distancia, es decir, instantánea, de la mecánica cuántica y el tiempo finito que, según la relatividad especial, necesita la

información para recorrer la distancia que separa la causa del efecto cuando éstos ocurren en lugares distintos. Veremos que no es así, la información no se propaga instantáneamente en el marco cuántico y esto es debido a que la información es subjetiva, la adquiere el físico observador en el momento de la medida, y aunque se refiera a un objeto distante, como ocurre cuando hay correlaciones cuánticas, la información no ha viajado de este objeto distante hasta el observador. Para otro observador, asociado al objeto distante, nada ha cambiado, nada ha aprendido y ninguna información le ha llegado instantáneamente.

### 2. Información

La palabra información se asocia a veces al concepto “significado”. La información como significado es muy difícil de cuantificar. En el prólogo al libro que contiene el artículo de Shannon publicado un año antes, Warren Weaver dice lo siguiente: “One has a vague feeling that information and meaning may prove to be something like a pair of canonically conjugate variables in quantum theory, they being subject to some joint restriction that condemns a person to sacrifice of the one as he insists of having much of the other” [6]<sup>1</sup>. El concepto de información introducido por Shannon es el de medida de la sorpresa. Por ejemplo, si decimos “el Sol saldrá mañana”, es una frase con muy poca o nula información: no se aprende nada. En cambio, la sentencia “el Sol *no* saldrá mañana”, es muy sorprendente y por lo tanto contiene una gran cantidad de información. La medida de la información será, según ello, una función de las probabilidades.

Supongamos que cierto suceso  $S$  ocurre con probabilidad  $p(S)$  y llamemos  $I(S)$  al contenido de información del suceso  $S$ . ¿Qué propiedades debería cumplir  $I(S)$ ? Los siguientes requisitos son de sentido común: (i) si un suceso  $S_1$  ocurre con menor probabilidad que otro  $S_2$  [ $p(S_1) \leq p(S_2)$ ] entonces  $S_1$  contiene más información (es más sorprendente) que  $S_2$ , es decir,  $I(S_1) \geq I(S_2)$ ; (ii) si  $S_1$  y  $S_2$  son sucesos independientes [ $p(S_1 \cap S_2) = p(S_1)p(S_2)$ ], la información contenida en ambos sucesos debería ser la suma  $I(S_1 \cup S_2) = I(S_1) + I(S_2)$ ; y (iii) un suceso cualquiera siempre contiene algo de información (salvo que su ocurrencia fuese inevitable)  $I(S) \geq 0, \forall S$ . Estas tres propiedades prácticamente determinan que la única solución sea  $I(S) \propto -\log[p(S)]$ . La constante de proporcionalidad se puede elegir de forma que  $I(S) = -\log_2[p(S)]$ . La unidad de información con esta elección es el *bit*. Por ejemplo, si tenemos dos sucesos excluyentes  $\{S_1, S_2\}$  que pueden ocurrir con la misma probabilidad  $p(S_1) = p(S_2) = 1/2$ , entonces la información contenida en cada uno de ellos es un bit,  $I(S_1) = I(S_2) = 1$ . Si el conjunto es de cuatro sucesos equiprobables, cada uno de ellos contiene 2 bits de información.

<sup>1</sup>Nótese el sutil cambio de artículo en el título del libro [6] respecto al título del trabajo original [1].

Si los sucesos no son equiprobables, obviamente el contenido de información de cada suceso será diferente. En general estaremos interesados en el promedio de información adquirida. La entropía de Shannon es precisamente este promedio y es el concepto fundamental de la teoría de la información. Específicamente, si los sucesos corresponden a una variable aleatoria  $X$ , y los etiquetamos por  $X=x_1, \dots, X=x_n$  y a sus correspondientes probabilidades por  $\{p_1, \dots, p_n\}$ , la entropía de Shannon es

$$H(X) = \sum_i p_i I(p_i) = -\sum_i p_i \log_2 p_i, \quad [p_i \equiv p(\bar{X} = x_i)]$$

Para hacernos una idea del significado de esta función, supongamos que los sucesos corresponden a las diferentes letras  $\{a, b, c, \dots\}$  de un mensaje (conjunto de letras) que se envía por un cierto canal de transmisión y sabemos que cada letra aparece con cierta probabilidad. La entropía de Shannon  $H(X)$  nos da la información promedio que se transmite por cada letra que se envía. En el idioma inglés es aproximadamente 1 bit por letra transmitida (un valor parecido es de esperar en castellano). Es fácil ver que el máximo de la entropía de Shannon,  $H(X)$ , ocurre si todas las probabilidades son iguales  $p_1 = p_2 = \dots = p_n$ , que para el inglés o castellano correspondería a unos 4.7 bits por letra transmitida. Estos idiomas son redundantes en aproximadamente un 80%. Por eso nos entendemos a pesar de lo mal que hablamos y podemos almacenar y transmitir los textos de forma comprimida, es decir de forma *cmprmd*. En el caso opuesto, si un suceso tiene probabilidad uno y el resto cero, la entropía de Shannon es cero. En efecto, no hay ninguna sorpresa en el hecho de que ocurra un suceso que sabemos que tiene un 100% de probabilidad de ocurrir.

### 3. Luz e información

En el marco de la relatividad especial la aceleración producida por una fuerza constante que actúa sobre una partícula de masa no nula tiende hacia cero a medida que la velocidad se acerca a la velocidad de la luz en el vacío,  $c$ , y la energía necesaria para alcanzar  $c$  se hace infinita. En otras palabras, toda partícula material se propaga con una velocidad inferior a  $c$ . Además esto es así en cualquier sistema de referencia, aunque los valores concretos de la velocidad y energía de la partícula varíen de un sistema a otro. Las ondas electromagnéticas, por otro lado, se propagan en el vacío a la velocidad  $c$ , en todos los sistemas de referencia. Como al transmitir una información utilizamos partículas u ondas electromagnéticas, se sigue que la información, al igual que la energía que transporta la partícula o la onda electromagnética, no puede propagarse a velocidad superior a la de la luz en el vacío.

En el marco de la mecánica cuántica las partículas materiales tienen asociada una onda que representa su estado cuántico en el espacio. Las ondas electromagnéticas se describen en función de los fotones, partículas sin masa que corresponden a los estados de energía mínima,  $h\nu$ , de una onda electromagnética de frecuencia  $\nu$ , o, como veremos más adelante, a cualquier superposición de estos estados de energía bien definida.  $h$  es la constante de Planck, cuyo valor es tan pequeño que harían falta más de 10 trillones de fotones de color amarillo para calentar un gramo de agua un

grado. Tal como ocurre con las partículas materiales, los estados de fotones suficientemente localizados, llamados pulsos, también se representan por una onda en el espacio, que en el vacío se propaga con velocidad  $c$ . Si consideramos la propagación en una sola dimensión, como todas las frecuencias se propagan con la misma velocidad  $c$ , la onda no modifica su forma y la velocidad de grupo, que podemos interpretar como la velocidad del máximo de la onda, también es  $c$ .

Cuando consideramos la propagación de una partícula u onda en un medio, asociarle una velocidad es mucho más ambiguo que en el caso de una partícula clásica. Esto es debido a que las distintas frecuencias se propagan con distintas velocidades, por lo que la onda cambia de forma. Normalmente es la velocidad de grupo la que tiene las características de velocidad física y en circunstancias normales no supera a  $c$ . La información continúa propagándose a velocidades que no superan a la de la luz en el vacío [7]. Sin embargo, cuando el medio es inusual pueden pasar cosas sorprendentes [8]. Así en el año 2000 Wang, Kuzmich y Dogariu dicen en el resumen de un artículo muy discutido y comentado que publicaron en Nature [9]: "...this means that a light pulse propagating through the atomic vapour cell appears at the exit side so much earlier than if it had propagated the same distance in a vacuum that the peak of the pulse appears to leave the cell before entering it". Los autores afirman que este resultado no viola causalidad ni la relatividad especial, y lo explican como la consecuencia de un fenómeno de interferencia en una región de dispersión anómala. La explicación defendida por Charles Bennett, aunque rechazada por los autores, es una ya conocida desde hacía tiempo y se basa en una amplificación de los precursores del pulso (el frente de la onda de pequeña amplitud pero que contiene toda la información del pulso) [10]. Esta amplificación es posible gracias a una cesión temporal de energía por parte del medio, que posteriormente recupera cuando llega la parte central del pulso (de gran amplitud). Esto último sucede cuando ya han emergido del medio los precursores amplificados y que tienen todas las características de la parte central. Como el frente de la onda siempre se propaga a velocidad  $c$ , porque contiene las frecuencias más altas y para éstas todo medio es transparente, la información nunca se propaga a velocidad superior a  $c$ .

En las tecnologías de la información y comunicación actuales, la presencia o ausencia de pulsos codifica un bit y la velocidad relevante es la de grupo. Este tipo de lectura del pulso es de grano grueso, ya que no es sensible a la forma del mismo. Nuestro análisis anterior de la información contenida en funciones de onda y pulsos, por el contrario, corresponde a una lectura de grano fino. Al describir detalladamente el pulso intervienen distintas velocidades, y no sólo la de grupo, y esto explica las paradojas que aparecen en medios inusuales.

Por otro lado, hay muchas velocidades superiores a  $c$ . Consideremos un faro que da una vuelta por segundo cuyo haz es un láser que proyecta un punto luminoso sobre una pantalla circular situada a 300.000 km de distancia. El punto luminoso recorrerá toda la pantalla en un segundo, desplazándose por lo tanto a una velocidad superior a  $6c$ . Lo que ocurre es que ni la energía ni la información se desplazan

tangencialmente, sino que lo hacen radialmente a velocidad  $c$ . Y esto es el mensaje de este capítulo: la energía y la información nunca pueden propagarse a velocidad superior a la de la luz en el vacío; si lo hicieran habría violación de causalidad, para algunos observadores los efectos ocurrirían antes que las causas y deberíamos revisar a fondo las ideas más básicas de la física. Como precisamente dijo Einstein: afirmaciones extraordinarias requieren razones extraordinarias. Estas razones no existen en la actualidad.

#### 4. Estados puros. Medidas

La descripción del estado de un sistema físico en el marco de la mecánica cuántica la denominaremos estado cuántico y es su concepto más básico. Un estado cuántico describe lo que conocemos sobre un sistema dado y tiene por ello una componente objetiva y otra subjetiva. De momento nos referiremos a estados puros, aquellos que describen un sistema sobre el que tenemos el máximo conocimiento posible y por lo tanto representan una descripción completa de él. Queremos dejar claro que siempre que hablemos de "estado" queremos decir 'descripción del estado del sistema físico en el marco de la mecánica cuántica' y por lo tanto nos declaramos incompetentes para hablar de lo que le ocurre 'realmente' al sistema físico.

Uno de los aspectos más importantes de la mecánica cuántica es que estados diferentes no siempre (en realidad casi nunca) son perfectamente distinguibles. Por el contrario, en la mecánica clásica estados diferentes de un sistema son, por definición, distinguibles. Dos estados son distinguibles si existe una medida que con absoluta certeza nos dice si es uno u otro. Por ejemplo:

- Polarización del fotón: vertical  $|\downarrow\rangle$  u horizontal  $|\leftrightarrow\rangle$ .
- Posición de un átomo: en  $x=a$ ,  $|a\rangle$ , en  $x=b$ ,  $|b\rangle$ , en  $x=c$ ,  $|c\rangle$ , ...
- Espín del electrón: hacia arriba  $|\uparrow\rangle$  o hacia abajo  $|\downarrow\rangle$ .
- Energía de una molécula: en el estado fundamental  $|f\rangle$  o en un estado excitado  $|e_1\rangle$ ,  $|e_2\rangle$ , ...
- Número de fotones: cero  $|0\rangle$ , uno  $|1\rangle$ , dos  $|2\rangle$  ...

Los estados cuánticos puros son vectores de un espacio de Hilbert. Cuando son distinguibles son ortogonales. La ortogonalidad se representa por  $\langle\downarrow|\leftrightarrow\rangle = 0$ . La dimensión de este espacio viene dada por el número máximo de estados distinguibles, que depende del sistema físico y de la magnitud física considerados, como se ha visto en los ejemplos dados *ut supra*. En este artículo, para simplificar la exposición, consideraremos esencialmente la polarización de los fotones, que se describe en un espacio de dos dimensiones, aunque una descripción completa de ellos requiera incluir además alguna otra magnitud como la posición, el momento lineal o la energía.

En un espacio de Hilbert, si dos estados de un sistema físico son posibles, también es posible cualquier superposición lineal de los mismos. Este hecho tiene consecuencias importantes. Algunas superposiciones nos parecen "normales", porque son fáciles de realizar o porque se dan frecuentemente en el microcosmos. En cambio, cuando estas superposiciones ocurren en sistemas de mayor tamaño, nos parecen "sorprendentes", aunque desde el punto de vista

matemático no haya ninguna diferencia con las anteriores. Veamos algunos ejemplos de superposiciones normales:

- Polarización diagonal,  $|\downarrow\rangle + |\leftrightarrow\rangle = |\nearrow\rangle$ , o circular,  $|\downarrow\rangle + i|\leftrightarrow\rangle = |\circlearrowleft\rangle$ .
- Estados de posición indefinida del átomo de nitrógeno en la molécula  $\text{NH}_3$ ,  $|a\rangle + |a\rangle$ . Las dos posiciones corresponden a la situación del nitrógeno a un lado o a otro del plano que forman los tres átomos de hidrógeno. éste no es mas que el estado fundamental de esta molécula.
- Espín del electrón en una dirección arbitraria,  $(\theta, \pi)$ ,  $\cos \theta |\uparrow\rangle + e^{i\phi} \sin \theta |\downarrow\rangle$ .
- Superposiciones de estados de energía,  $|f\rangle \pm |e\rangle$ . Para el átomo de nitrógeno de la molécula  $\text{NH}_3$  éstas corresponden a estados localizados de posición.
- Estado coherente de un láser. Superposición de  $0+1+2+\dots$  fotones.

Algunos ejemplos sorprendentes:

- Superposición de dos estados de *un único* ion de berilio  ${}^9\text{Be}^+$  de una extensión de unos 7 nm cada uno y separados una distancia de 80 nm, más de 10 veces la extensión de cada estado individual.
- Difracción de moléculas complejas debida a que el estado de la molécula es superposición de estados correspondientes a trayectorias distintas. El grupo de Anton Zeilinger en Viena ha observado experimentalmente la difracción de moléculas enormes como los fulerenos fluorados (60 átomos de carbono y 48 de flúor, lo que supone una masa de más de 1600 átomos de hidrógeno) o incluso moléculas biológicas como la porfirina (que forma parte de la hemoglobina) [12]. Cuando se hacen pasar por una red de difracción se observan franjas de interferencia, cuya explicación sólo puede ser que cada macromolécula ha pasado "a la vez" por las distintas rendijas de la red de difracción. Hay que notar que la distancia entre rendijas es aproximadamente 100 veces el tamaño típico de estas macromoléculas.

La superposición de estados es la responsable de la no distinguibilidad, que no tiene análogo clásico. El estado  $|\nearrow\rangle = 1/\sqrt{2} (|\downarrow\rangle + |\leftrightarrow\rangle)$ , adecuadamente normalizado  $\langle\nearrow|\nearrow\rangle = 1$ , es en parte  $|\downarrow\rangle$  y en parte  $|\leftrightarrow\rangle$ . Debido a ello, y como veremos, ninguna medida puede distinguir con certeza  $|\nearrow\rangle$  de  $|\downarrow\rangle$ , ya que no son ortogonales. Antes de continuar nuestra discusión es preciso dar un significado más preciso de lo que es una medida.

Una medida es un interrogatorio al que se somete un sistema físico. La medida pregunta al sistema en qué estado, de entre un conjunto completo de estados distinguibles (ortogonales), se encuentra. El sistema declarará encontrarse en uno de ellos de acuerdo con una ley de probabilidad. Notemos, no obstante, que el estado en que se encontraba el sistema antes de la medida normalmente no es el que ha manifestado estar. Podemos decir provocativamente que el sistema se encontraba en todos y en ninguno de los estados distinguibles de la medida. La completitud asegura que la suma de probabilidades de los posibles resultados de una medida sea la unidad. Por ejemplo, una medida puede corresponder a la pregunta: ¿el estado es  $|\downarrow\rangle$  o  $|\leftrightarrow\rangle$ ? Esta medida la representaremos por  $\boxplus$ . También podemos preguntar ¿el estado es  $|\nearrow\rangle$

o  $|\downarrow\rangle$ ? en este caso usamos como símbolo para la medida  $\diamondsuit$ . Para el estado  $|\uparrow\rangle$  una medida  $\boxplus$  dará con el 100% de certeza que es  $|\uparrow\rangle$ . Si medimos  $\diamondsuit$  dará con 50% de probabilidad  $|\nearrow\rangle$  y con 50% de probabilidad  $|\downarrow\rangle$ , tal y como dice la regla de Born para las probabilidades cuánticas:

$$p(|\nearrow\rangle) = |\langle \nearrow | \uparrow \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$p(|\downarrow\rangle) = |\langle \downarrow | \uparrow \rangle|^2 = \frac{1}{2}.$$

Supongamos que sabemos que el fotón está en  $|\uparrow\rangle$  o  $|\nearrow\rangle$ . Para saber en cual de ambos está realmente, hay que hacer una medida, como por ejemplo  $\boxplus$ . Hemos visto que para  $|\uparrow\rangle$  obtenemos siempre  $|\uparrow\rangle$ , mientras que para  $|\nearrow\rangle$  se obtiene con la misma probabilidad 1/2 los estados  $|\uparrow\rangle$  y  $|\leftrightarrow\rangle$ . Así, si el resultado es  $|\leftrightarrow\rangle$  seguro que el fotón estaba en  $|\nearrow\rangle$ . Por el contrario, si el resultado es  $|\uparrow\rangle$  no podemos conocer el estado inicial del fotón. Es fácil convencerse de que ninguna medida será capaz de distinguirlos con certeza, incluso si se dispone de varias copias idénticas del sistema. Esta característica cuántica se puede usar para enviar información cifrada de forma segura. De hecho ya se han construido prototipos comerciales que realizan esta tarea [13].

## 5. Estados mezcla

Un estado puro describe un sistema cuántico sobre el que tenemos el máximo conocimiento posible. Cuando el conocimiento no es máximo el sistema está descrito por un estado mezcla o matriz densidad, que habitualmente se representa por  $\rho$ . Un estado mezcla puede aparecer como consecuencia de nuestra (mayor o menor) ignorancia sobre cómo ha sido preparado el sistema. También puede aparecer cuando de una colectividad de sistemas físicos idénticos, sobre cuya distribución de estados tenemos algún (o ningún) conocimiento, extraemos uno cualquiera.<sup>2</sup>

Un estado representa siempre el conocimiento que tenemos sobre el sistema físico. Si nos atenemos a esta definición muchas de las aparentes paradojas de la mecánica cuántica desaparecen, pero habrá que abandonar el prejuicio que el estado cuántico *es* el sistema físico. Por lo tanto, lo que sabemos sobre la realidad, lo único que científicamente importa, es subjetivo en cuanto depende de la información de la que dispone el observador.

Analicemos la situación descrita al final de la sección anterior, donde no sabemos si el estado es  $|\uparrow\rangle$  o  $|\nearrow\rangle$ . Sólo sabemos que con probabilidad  $p_1$  es el primero y con probabilidad  $p_2 = 1 - p_1$  es el segundo. La descripción del sistema ha de ser tal que nos permita incluir esta ignorancia. Esto se puede expresar diciendo que la matriz densidad proyecta sobre el espacio de  $|\uparrow\rangle$  con probabilidad  $p_1$  y análogamente para el segundo estado (si hubiese más posibilidades éstas se irían añadiendo). El proyector sobre el espacio de un estado  $|a\rangle$  es una matriz que se denota por  $|a\rangle\langle a|$ . Así pues el sistema vendrá descrito por:

$$\rho = p_1 |\uparrow\rangle\langle \uparrow| + p_2 |\nearrow\rangle\langle \nearrow|. \quad (1)$$

Esta descripción está aún más justificada cuando calculamos las probabilidades de los distintos resultados de una

medida. Supongamos que medimos nuestro sistema cuántico con el aparato  $\diamondsuit$ . Las leyes elementales de la probabilidad dictan que la probabilidad de obtener cada resultado será

$$p(|\nearrow\rangle) = p_1 p(|\nearrow|\uparrow\rangle) + p_2 p(|\nearrow|\nearrow\rangle)$$

$$p(|\downarrow\rangle) = p_1 p(|\downarrow|\uparrow\rangle) + p_2 p(|\downarrow|\nearrow\rangle).$$

Así podemos extender la regla de Born para estados mezcla de la siguiente forma

$$p(|\nearrow\rangle) = \langle \nearrow | \rho | \nearrow \rangle = p_1 |\langle \nearrow | \uparrow \rangle|^2 + p_2 |\langle \nearrow | \nearrow \rangle|^2$$

$$p(|\downarrow\rangle) = \langle \downarrow | \rho | \downarrow \rangle = p_1 |\langle \downarrow | \uparrow \rangle|^2 + p_2 |\langle \downarrow | \nearrow \rangle|^2,$$

si  $\rho$  viene dado por (1). Notemos que  $\rho$  es una matriz positiva (por lo tanto hermítica) y que tiene traza unidad,  $\text{tr } \rho = 1$  (estas dos propiedades son análogas a las de las leyes de probabilidad).

La descripción del sistema cuántico depende del conocimiento que tengamos sobre él. En el caso que nos ocupa, si no disponemos de ninguna información para favorecer que el estado sea  $|\uparrow\rangle$  sobre la opción  $|\nearrow\rangle$ , es decir, si tenemos completa ignorancia sobre las dos opciones, debemos asignar  $p_1 = p_2 = 1/2$ . Una forma natural de asignar probabilidades en situaciones más generales donde se tienen más opciones y alguna información parcial viene dada por el principio de Jaynes [14]: las probabilidades han de ser tales que correspondan al máximo de entropía (de Shannon) compatible con la información de la que se dispone, es decir al máximo posible de ignorancia a priori.

Una misma matriz densidad puede ser descompuesta de muchas formas diferentes, excepto cuando representa un estado puro. Con todas ellas, por la regla de Born, que no sabe de descomposiciones, se obtendrán las mismas probabilidades para cualquier medida. Por lo tanto, las descomposiciones serán totalmente indistinguibles y por ende idénticas. Sólo en el caso de conocimiento máximo, es decir para estados puros, la descomposición es única (tal y como se podía esperar). Veamos algunos ejemplos para la matriz densidad  $\rho$  dada por (1) con  $p_1 = p_2 = 1/2$ . La descomposición en términos de dos estados distinguibles,  $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0$ , es

$$\rho = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle\langle \uparrow| + \frac{1}{2} |\nearrow\rangle\langle \nearrow| = \lambda_1 |\psi_1\rangle\langle \psi_1| + \lambda_2 |\psi_2\rangle\langle \psi_2|,$$

donde

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}, \quad |\psi_{1,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}} (|\uparrow\rangle \pm |\nearrow\rangle)$$

son los valores y estados propios de  $\rho$ . Una descomposición con más de dos estados podría ser

$$\rho = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} |\uparrow\rangle\langle \uparrow| + \frac{2 + \sqrt{2}}{4} |\leftrightarrow\rangle\langle \leftrightarrow| + \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_1\rangle\langle \psi_1|,$$

y así se pueden encontrar infinitas descomposiciones del mismo estado cuántico. Desde un punto de vista clásico esta multiplicidad de descomposiciones es sorprendente, ya que se considera siempre que estados diferentes son distinguibles. En el marco de la mecánica cuántica, como toda la información está contenida en la matriz densidad  $\rho$ , preten-

<sup>2</sup>En la siguiente sección veremos un tercer caso, quizás el más relevante: cuando se describe una parte de un sistema compuesto.

der distinguir sus diferentes descomposiciones no es más que una rémora de nuestro pensamiento clásico.

Observemos que en la descomposición de  $\rho$  en estados distinguibles  $\lambda_i \geq 0$  y  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  (esto es debido a que  $\rho$  es una matriz positiva con  $\text{tr } \rho = 1$ ). Por lo tanto, los valores  $\lambda_i$  pueden ser interpretados como probabilidades. Además como los estados  $|\psi\rangle$  son distinguibles, el conjunto  $\lambda_i$  corresponde a una ley de probabilidad clásica de la que podemos calcular su entropía de Shannon, que en este caso se denuncia entropía de von Neumann,  $S(\rho) = -\lambda_1 \log_2 \lambda_1 - \lambda_2 \log_2 \lambda_2$ . La entropía de von Neumann es el análogo cuántico de la entropía de Shannon y puede expresarse de forma general independiente de la descomposición de  $\rho$  como

$$S(\rho) = -\text{tr}[\rho \log_2 \rho].$$

Notemos que la afirmación (relativamente gratuita) que encabeza esta sección –un estado puro es aquel sobre el que tenemos máximo conocimiento– está ahora plenamente justificada. La matriz densidad correspondiente a un estado puro sólo tiene un valor propio no nulo, y que por lo tanto vale uno. En este caso la entropía de von Neumann es  $S(\rho) = 0$ , es decir, ignorancia cero. En el otro extremo, un estado sobre el que no tenemos ninguna información se describe con una matriz densidad proporcional a la identidad. Para los sistemas de dos niveles discutidos hasta ahora esto significa  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$  y una entropía máxima de  $S = 1$  bit. La entropía de von Neumann al igual que la de Shannon es uno de los conceptos fundamentales de la información cuántica.

Finalmente, otro aspecto interesante es cómo describen un mismo sistema físico diferentes observadores,  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  que pueden tener diferente información sobre el sistema –incluso alguno de ellos puede tener información máxima. Cada observador describirá el sistema con una matriz densidad diferente:  $\rho^\alpha, \rho^\beta, \rho^\gamma, \dots$  La pregunta natural que surge en este contexto es: ¿qué tienen en común todas las descripciones posibles de un mismo sistema cuántico? Es decir, ¿cuán arbitraria es  $\rho$ ? La respuesta es bastante intuitiva [15]: los estados mezcla  $\rho^\alpha, \rho^\beta, \rho^\gamma, \dots$ , tienen todos ellos al menos una descomposición en la que aparece un estado puro común a todas ellas. En particular, es imposible que dos observadores describan el mismo sistema físico con estados puros diferentes, ya que en ese caso la descomposición de la matriz densidad es única. Si lo hicieran, o no son honestos, o tienen datos falseados, o no son buenos científicos.

## 6. Sistemas compuestos. Correlaciones cuánticas

Los aspectos más antiintuitivos de la mecánica cuántica aparecen cuando se consideran sistemas con varias partes o subsistemas. En este caso hablaremos de sistemas compuestos. Por ejemplo, supongamos que tenemos dos fotones suficientemente separados en el espacio de forma que un observador  $\alpha$  sólo mide sobre uno de ellos y otro observador  $\beta$  sobre el otro. Esta configuración nos permite etiquetar con los índices  $A$  y  $B$  cada uno de los fotones respectivamente. Supongamos que estos dos fotones están en estados de polarización  $|\uparrow\rangle_A$  y  $|\downarrow\rangle_B$ . Este sistema compuesto se describe con el estado producto  $|\psi\rangle = |\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B$ . También podríamos tener un estado producto  $|\uparrow\rangle_A |\leftrightarrow\rangle_B$  o  $|\downarrow\rangle_A |\leftrightarrow\rangle_B$ , etc..

Es sabido que los fotones satisfacen la estadística de Bose-Einstein y por lo tanto su función de ondas debería ser

simétrica bajo el intercambio de las magnitudes correspondientes a cada partícula, en este caso las polarizaciones. Esto no ocurre en los dos últimos ejemplos. Ello, no obstante, no representa un problema, ya que sólo tenemos en cuenta la polarización y no otras magnitudes, como la posición, que en este caso se ha substituido por las etiquetas  $A$  y  $B$  asociadas a los observadores locales  $\alpha$  y  $\beta$ . Una vez marcados los fotones, asociándolos a sus observadores, se pueden tratar como no idénticos.

Los estados producto también aparecen en la descripción íntegra de una sola partícula con espín o polarización al añadir otras magnitudes. Así un fotón polarizado verticalmente y localizado en  $x = a$  se describe con  $|\uparrow\rangle |a\rangle$ . Es cuando se describen varias partículas idénticas de forma íntegra que se debe tener en cuenta la simetrización (o antisimetrización si satisfacen la estadística de Fermi-Dirac) del estado.

El principio de superposición nos dice que si dos estados son posibles, cualquier combinación lineal ha de ser posible. En particular, puede haber un sistema descrito por el estado puro

$$|\psi\rangle = \frac{|\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B + |\leftrightarrow\rangle_A |\leftrightarrow\rangle_B}{\sqrt{2}}. \quad (2)$$

Es fácil comprobar que  $|\psi\rangle$  no es estado producto y, por lo tanto, ninguno de los fotones, por muy alejados que estén uno del otro, admite una descripción completa por separado, es decir, no se puede asociar una polarización definida a cada uno de ellos. En estas circunstancias se dice que los fotones están entrelazados y no admiten una descripción local completa. Esta característica exclusiva de la mecánica cuántica es consecuencia del hecho que el espacio de Hilbert de sistemas compuestos sea el producto tensorial del espacio de Hilbert de cada parte. En la mecánica clásica los sistemas compuestos se describen en un espacio producto cartesiano de los espacios de fases de cada una de las partes. Así la dimensión del espacio crece exponencialmente con el número de partes en el caso cuántico y sólo linealmente en el clásico. Esta diferencia en el número de estados posibles junto a la propiedad de entrelazamiento cuántico es lo que confiere a la mecánica cuántica su potencial computacional [16].

El estado (2) es un buen ejemplo para ilustrar gran parte de las peculiaridades y paradojas que se dan en los sistemas compuestos. Observemos, por ejemplo, que  $|\psi\rangle$  también se puede escribir como

$$|\psi\rangle = \frac{|\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B + |\leftrightarrow\rangle_A |\leftrightarrow\rangle_B}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

Al igual que en el caso de estados mezcla discutidos en la sección anterior, nuestra mentalidad clásica nos podría inducir a intentar distinguir entre las descripciones (2) y (3). Es un intento vano ya que el estado  $|\psi\rangle$  es el mismo.

Analicemos ahora las medidas locales, es decir, las que se realizan sobre una de las partes, y las consecuencias que de ellas se puedan derivar. Supongamos que el observador  $\alpha$  realiza una medida local, es decir, sobre la parte  $A$ , con un aparato  $\boxplus$  y obtiene el resultado  $|\uparrow\rangle$ . Esto ocurre con una probabilidad del 50%. De la expresión (2) inferimos que si el observador  $\beta$  midiese entonces la parte  $B$  con el aparato  $\boxplus$  obtendría con certeza  $|\uparrow\rangle$ , aunque  $\beta$ , salvo que  $\alpha$  le haya informado, es ignorante de esta certeza. Si  $\alpha$  hubiese obtenido

do  $|\leftrightarrow\rangle$  (lo que ocurre con el otro 50% de probabilidad),  $\beta$  obtendría  $|\leftrightarrow\rangle$  con total certeza. El estado  $|\psi\rangle$  correlaciona perfectamente los resultados de estas medidas locales. Nótese que las mismas correlaciones entre estas medidas locales se pueden obtener describiendo el sistema compuesto con la matriz densidad

$$\rho_{\boxplus} = \frac{1}{2} |\Downarrow\rangle_A \langle \Downarrow| |\Downarrow\rangle_B \langle \Downarrow| + \frac{1}{2} |\leftrightarrow\rangle_A \langle \leftrightarrow| |\leftrightarrow\rangle_B \langle \leftrightarrow|$$

que sólo contiene correlaciones clásicas. La situación es más interesante cuando consideramos otro aparato de medida, por ejemplo  $\diamondsuit$ . Aquí podemos utilizar la representación (3), y deducir fácilmente que si  $\alpha$  obtiene  $|\nearrow\rangle$  para  $A$ ,  $\beta$  obtiene  $|\nearrow\rangle$  para  $B$  con certeza, y análogamente para un resultado en la otra dirección ortogonal. De nuevo, se obtendrían los mismos resultados si el sistema compuesto estuviese descrito por el siguiente estado que sólo contiene correlaciones clásicas:

$$\rho_{\diamondsuit} = \frac{1}{2} |\nearrow\rangle_A \langle \nearrow| |\nearrow\rangle_B \langle \nearrow| + \frac{1}{2} |\nwarrow\rangle_A \langle \nwarrow| |\nwarrow\rangle_B \langle \nwarrow|$$

Como  $\rho_{\boxplus} \leq \rho_{\diamondsuit}$  las dos descripciones en términos de correlaciones clásicas son incompatibles entre ellas. Los estados entrelazados presentan correlaciones que van más allá de las clásicas y que se denominan correlaciones cuánticas. éstas se pueden describir mediante conjuntos de correlaciones clásicas, pero que no son compatibles entre sí.

¿Cómo describe su fotón un observador local cuando ignora la presencia del otro? El observador  $\alpha$  puede suponer que el observador  $\beta$  ha medido  $B$  con el aparato  $\boxplus$ . De la discusión anterior, la descripción del subsistema  $A$  por parte del observador  $\alpha$ , que desconoce el resultado de la medida de  $\beta$ , es

$$\rho_{A\boxplus}^{\alpha} = \frac{1}{2} |\Downarrow\rangle_A \langle \Downarrow| + \frac{1}{2} |\leftrightarrow\rangle_A \langle \leftrightarrow|$$

El observador  $\alpha$  también podría suponer que  $\beta$  ha medido con el aparato  $\diamondsuit$ . En este caso la descripción local sería

$$\rho_{A\diamondsuit}^{\alpha} = \frac{1}{2} |\Downarrow\rangle_A \langle \Downarrow| + \frac{1}{2} |\leftrightarrow\rangle_A \langle \leftrightarrow|$$

Obsérvese, que  $\rho_{A\boxplus}^{\alpha} = \rho_{A\diamondsuit}^{\alpha} = \mathbb{I}/2$ , donde  $\mathbb{I}$  es la matriz identidad. Para cualquier medida que realizara  $\beta$  la descripción local de  $A$  por parte de  $\alpha$  sería siempre la misma, dada por la matriz densidad  $\rho_A^{\alpha}$ . Como esta descripción no debe depender de lo que haga  $\beta$ , debe ser también correcta cuando  $\beta$  decide no medir. En el ejemplo estudiado, la matriz densidad  $\rho_A^{\alpha}$  es proporcional a la identidad, y ya hemos visto en la sección anterior que corresponde a máxima ignorancia, es decir, que la entropía de von Neumann,  $S(\rho_A^{\alpha})$ , es 1 bit. Por otro lado, el estado inicial  $|\psi\rangle$  es puro y por lo tanto de entropía nula,  $S(|\psi\rangle \langle \psi|) = 0$ . Como es de esperar, toda la información contenida en las correlaciones cuánticas de  $|\psi\rangle$  se ha perdido irremediablemente al hacer una descripción local. Esta pérdida objetiva de información contrasta con la ignorancia subjetiva que contenían las matrices densidad analizadas en la sección anterior. Sin embargo, la mecánica cuántica trata por igual cualquier tipo de ignorancia, ya que toda la información, y sólo ésta, está contenida en la matriz densidad. La fórmula general para describir localmente una

parte  $A$  de un sistema compuesto descrito por una matriz densidad  $\rho$  y que resume toda la discusión anterior es

$$\rho_A^{\alpha} = \text{tr}_B \rho, \quad (4)$$

donde la traza se realiza sobre el subespacio  $B$ . La interpretación es sencilla: ignorar la parte  $B$  corresponde a sumar sobre todos los posibles resultados de medidas en  $B$  pesados con sus correspondientes probabilidades, y esto equivale a hacer la traza sobre el subespacio  $B$ .

Otra pregunta interesante es ¿cómo describe un observador el otro subsistema? Antes de medir, el observador  $\beta$  describe el subsistema  $A$  por la misma expresión (4), que para el estado (2) es

$$\rho_A^{\alpha} = \text{tr}_B \rho = \frac{\mathbb{I}}{2}. \quad (5)$$

Esto se sigue, *mutatis mutandis*, por un razonamiento análogo al que ha conducido a (4). Si  $\beta$  mide un observable local y obtiene un determinado resultado, automáticamente sabe cual es el estado de la parte  $A$ . En el caso que  $\beta$  mida  $\boxplus$  y obtenga  $|\Downarrow\rangle$ , el estado del subsistema  $A$  colapsa a  $|\Downarrow\rangle$ , por muy separados que estén los dos subsistemas, es decir,

$$\rho_A^{\alpha} = \text{tr}_B \rho = \frac{\mathbb{I}}{2}. \quad (6)$$

Al medir, el observador  $\beta$  cambia drásticamente su descripción de la parte  $A$ , que pasa de ser una matriz densidad de máxima entropía (5) a un estado puro (6), que tiene entropía cero. Este colapso instantáneo<sup>3</sup> y a distancia, sin medir sobre el subsistema, es sorprendente y explica la incompatibilidad de Einstein (“... spooky action at a distance...”). La pregunta que nos planteamos ahora es si sirve para transmitir información de forma instantánea. Esto, más que sorprendente, como veremos, sería preocupante.

## 7. Transmisión de información. Conclusiones

La medida efectuada por  $\beta$ , discutida en el párrafo anterior, daba como resultado el estado puro  $\rho_A^{\beta}$ . Efectivamente, si el observador  $\alpha$  midiese con  $\boxplus$  obtendría  $|\Downarrow\rangle$ . Esta medida parece proporcionar a  $\alpha$  información sobre el colapso causado por la medida de  $\beta$  y, por lo tanto, se podría pensar en la posibilidad de comunicación superlumínica.

Así  $\beta$  podría transmitir instantáneamente un bit de información asociando el valor 0 a  $|\Downarrow\rangle$  y el 1 a  $|\leftrightarrow\rangle$ . Obviamente esto no es posible por el carácter aleatorio de los resultados de la medida en  $B$ , que hace imposible que cuando  $\beta$  quiera enviar el valor 0 el resultado de su medida sea  $|\Downarrow\rangle$  con seguridad. De esta forma  $\beta$  sólo envía ruido, pero no información.

Lo que sí puede controlar  $\beta$  es qué medida realiza. Por lo tanto podría asociar 0 a la medida  $\boxplus$  y 1 a la medida  $\diamondsuit$ . Si  $\alpha$  pudiese discriminar entre los dos conjuntos de estados  $\{|\Downarrow\rangle, |\leftrightarrow\rangle\}$  (que resultan de la medida  $\boxplus$  en  $B$ ) y  $\{|\nearrow\rangle, |\nwarrow\rangle\}$  (que resultan de la medida  $\diamondsuit$  en  $B$ ), efectivamente habría transmisión instantánea de un bit de información. Pero esto no es posible ya que, como vimos en la sección anterior, la descripción local  $\rho_A^{\alpha}$  es independiente de lo que decida hacer  $\beta$ . Por ello ninguna medida local de  $\alpha$  permite adquirir la información que  $\beta$  pretendía transmitir.

<sup>3</sup>Recientemente se ha medido la velocidad a la que se produce el colapso, y se ha obtenido [17] una cota inferior de  $1.5 \times 10^4 c$  en el sistema de referencia de la radiación de fondo.

Finalmente discutiremos un método que podría desafiar el límite relativista de transmisión de información: el teletransporte cuántico [18]. No haremos una exposición detallada del mismo, que requeriría mucho más espacio del que disponemos aquí, pero sí presentaremos los aspectos más relevantes. El teletransporte cuántico permite hacer desaparecer un estado cuántico de un lugar  $A$  para hacerlo aparecer en otro arbitrariamente separado del primero  $B$  de forma intacta (en condiciones ideales), sin que haya mediado un transporte material del sistema físico. Para ello, dos observadores,  $\alpha$  y  $\beta$ , han de compartir un estado máximamente entrelazado como (2). El observador  $\alpha$  realiza una medida conjunta de su parte del estado entrelazado y del que pretende teletransportar y comunica el resultado de su medida a  $\beta$ . Con esta información  $\beta$  puede reconstruir de forma exacta el estado que tenía  $\alpha$ . Este resultado puede parecer turbador, pero no es más que el reflejo de las propiedades ciertamente antiintuitivas de la mecánica cuántica. El motivo de fondo es el entrelazamiento del estado que comparten los observadores y la no-localidad del mismo. Sin embargo, de nuevo, no hay forma de realizar una transmisión superlumínica: el observador  $\alpha$  debe comunicar el resultado de su medida a  $\beta$  y esta información debe viajar con un soporte físico, y por lo tanto no puede hacerlo a velocidades superiores a la de la luz. Antes de que llegue esta información, la descripción del observador  $\beta$  de su estado será una matriz densidad proporcional a la identidad como (2), es decir, la correspondiente a máxima ignorancia. Sólo cuando le llega la información de  $\alpha$  podrá reconstruir el estado y completar el fenómeno del teletransporte.

Si el marco de la mecánica cuántica hubiese permitido la transmisión instantánea de información, ésta no hubiese servido de punto de partida para su versión relativista, la teoría cuántica de campos. La mecánica cuántica, información y relatividad se relacionan de tal manera, que ninguna de ellas parece poner en peligro los principios de las otras. Como dice el premio Nobel Stephen Weinberg [19]: la física es de una estructura asombrosamente rígida, no se puede alterar una parte sin tener que cambiarlo todo. De momento, no parece que haya motivos para cambiar, y sí para seguir explorando las interrelaciones entre estas teorías, que nos están permitiendo descubrir las posibilidades y las limitacio-

nes de la información en la física y de la física de la información. La duda que nos queda es si los rasgos subjetivos de la mecánica cuántica discutidos en este artículo, de connotaciones antropocéntricas, impiden que ésta sea el punto de partida de una teoría final, o si son precisamente estos rasgos los que le permitirían serlo.

Agradecemos los valiosos comentarios y sugerencias de nuestros colegas Antonio Acín, Emili Bagan, Albert Bramon, Lluís Garrido, David Jou, Lluís Masanes, Roman Orús, Josep Taron y Guifré Vidal. Ha sido un placer discutir con ellos sobre muchos aspectos de este artículo.

## Bibliografía

- [1] C.E. SHANNON, "A Mathematical Theory of Communication", *Bell Systems Technical Journal* **27**, 379-423, 623-656 (1948).
- [2] R.E. PEIERLS, "In defense of 'measurement'", *Physics World*, January 1991.
- [3] A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Phys. Rev.* **46**, 777 (1935).
- [4] E. SCHRÖDINGER, *Naturwissenschaften* **23**, 807,823 y 844 (1935).
- [5] R. LANDAUER, Physics Today, p. 23 May 1991; *Phys. Lett. A* **217**, 188 (1996).
- [6] C.E. SHANNON AND W. WEAVER, "The Mathematical Theory of Communication", University of Illinois Press, Urbana 1949.
- [7] L. BRILLOUIN, "Wave propagation and group velocity", Academic Press, New York 1960.
- [8] R. TARRACH, "Velocidades superlumínicas y causalidad", *Investigación y Ciencia* **241**, Octubre 1996.
- [9] L.J.WANG, A KUZMICHEV AND A. DOGARIU, *Nature* **406**, 277 (2000).
- [10] P. W. MILONNI, carta a Physics Today, p. 14 February 2001.
- [11] C. MONROE *et al.*, *Science* **272**, 1131 (1996).
- [12] L. HACKERMÜLLER *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 090408 (2003).
- [13] Pueden visitarse las páginas de la compañía suiza *Id quantique*, <http://www.idquantique.com>; o la norteamericana *MagiQ Technologies*, <http://www.magiqtech.com>.
- [14] E.T. JAYNES, *Phys. Rev.* **108**, 171 (1957).
- [15] T.A. BRUN, J. FINKELSTEIN AND N. D. MERMIN, *Phys. Rev. A* **65**, 032315 (2002).
- [16] C.H. BENNETT AND D.P. DiVINCENZO, *Nature* **404**, 247 (2000).
- [17] V. SCARANI *et al.*, *Phys. Lett. A* **276**, 1 (2000).
- [18] C.H. BENNETT *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).
- [19] S. WEINBERG, "Dreams of a Final Theory", Pantheon, New York, 1992.

**Ramón Muñoz-Tapia**

está en el Grupo de Física Teórica & IFAE. Facultad de Ciencias. Univ. Autónoma de Barcelona

**Rolf Tarrach**

está en el Dpto. d'Estructura i Constituents de la Matèria, Universidad de Barcelona



## Ruido Ambiental por Infraestructuras de Transporte y Urbano (2ª Edición)

Santiago EXPÓSITO PAJE

Laboratorio de Acústica Aplicada a la Ingeniería Civil

LA2IC

25-28 de Abril de 2005

Para más información y antes del 5 de Abril ponerse en contacto con:

Secretaría de Programa de Postgrado

E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

Avda. Camilo José Cela, s/n, 13071 Ciudad Real

Tel: 926/295498 ó 926/295396; Fax: 926/295488

e-mail: [caminos@uclm.es](mailto:caminos@uclm.es)